Г. Д. Ким, Л. В. Крицков

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Теоремы и задачи

Том II

Под редакцией академика РАН В. А. Ильина

планета знаний

МОСКВА
2007

ЗБК
К-400

Научная библиотека МГУ
67041086

ББК 22.147

Рекомендовано
Советом по прикладной математике и информатике
УМО по классическому университетскому образованию
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 010200
«Прикладная математика и информатика» и направлению 510200
«Прикладная математика и информатика»

Ким Г.Д., Крицков Л.В.
Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II. М.: «Планета знаний», 2009. — 456 с.

ISBN 978-5-903242-04-7

Настоящая книга представляет собой второе, переработанное и дополненное, издание задачника по объединенному курсу алгебры и аналитической геометрии. Теоретической поддержкой книги является учебник Ильина В.А., Ким Г.Д. «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», в котором авторы придерживаются современной тенденции объединения традиционно различных разделов математики в одну дисциплину, добиваясь наглядности алгебраических абстракций и лаконичности геометрических доказательств. Каждый раздел учебника содержит теоретическое введение, примеры решения типовых задач и большое число задач для семинарских занятий и самостоятельной работы студентов. Задачи снабжены ответами и указаниями.

Пособие предназначено для студентов физико-математических специальностей университетов.

ISBN 978-5-903242-04-7

© Ким Г.Д., Крицков Л.В., 2009
© Издательство «Планета Знаний», 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 5
Список литературы 6
Глава XII. **Линейное пространство над произвольным полем** 8
§ 44. Определение и основные свойства 8
§ 45. Линейное подпространство 25
§ 46. Линейное аффинное многообразие 42
Глава XIII. **Евклидовы и унитарные пространства** ... 54
§ 47. Скалярное произведение. Матрица Грама 54
§ 48. Ортогональные векторы 65
§ 49. Ортогональные подпространства 78
§ 50. Метрические задачи 90
§ 51. Линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве 103
Глава XIV. **Линейные операторы в линейных пространствах** 110
§ 52. Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора 110
§ 53. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентные и подобные матрицы 125
§ 54. Образ и ядро линейного оператора 133
§ 55. Линейное пространство линейных операторов 142
§ 56. Умножение линейных операторов. Обратный оператор 147
Глава XV. **Структура линейного оператора в комплексном пространстве** 158
§ 57. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен 158
§ 58. Операторы и матрицы простой структуры 178
§ 59. Инвариантные подпространства. Прямая сумма операторов 187
§ 60. Корневые подпространства. Жорданова форма 202
Глава XVI. **Линейные операторы в унитарном и евклидовом пространствах** 227
§ 61. Сопряженный оператор 227
§ 62. Нормальные операторы и матрицы 243
§ 63. Унитарные операторы и матрицы 253

§ 64. Самосопряженные операторы и матрицы 267
§ 65. Знакоопределенные операторы и матрицы 275
§ 66. Разложения линейных операторов и матриц 288

Глава XVII. Билинейные и квадратичные формы 299
§ 67. Билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве 299
§ 68. Квадратичные формы в вещественном и комплексном пространствах 310
§ 69. Квадратичные формы в евклидовом и унитарном пространствах 319

Глава XVIII. Линейные нормированные пространства 338
§ 70. Норма вектора 338
§ 71. Линейные операторы в нормированных пространствах. Нормы операторов и матриц 348
§ 72. Нормы и операторные уравнения. Псевдорешения 356

Ответы и указания 376
Предметный указатель 447
Указатель обозначений 452

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее учебное пособие представляет собой второе издание тома II задачника по объединенному курсу алгебры и аналитической геометрии [10]. В нем исправлены опечатки и неточности, обнаруженные в тексте первого издания, и добавлено более 100 новых задач.

По тематике оно охватывает следующие разделы: линейное пространство над произвольным полем, евклидово и унитарное пространства, линейные операторы, билинейные и квадратичные формы, линейное нормированное пространство. По подборке задач пособие опирается на известные пособия ([1], [5], [7], [17], [18], [19]). Структура §64 близко следует книге «Задачник по линейной алгебре» Х.Д.Икрамова [7].

Будучи непосредственным продолжением первого тома [11], пособие наследует его структуру. Задачи сгруппированы в параграфы, нумерация которых продолжает нумерацию первого тома. Для сохранения прежней нумерации новые задачи снабжены «тройными» номерами или расположены в конце параграфов.

Теоретической поддержкой задачника являются учебник В.В.Воеводина [2], в котором заложены методические основы объединения курсов алгебры и геометрии, и учебник В.А.Ильина, Г.Д.Ким [8]. Последовательность разделов, а также определения и обозначения соответствуют учебнику [8]. В конце задачника помещены ответы к задачам, к некоторым из них даются рекомендации.

Нам приятно отметить благотворное влияние опытнейших алгебраистов факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова, профессоров Е.Г.Дьяконова, Х.Д.Икрамова и Е.В.Шикина, доцентов Н.И.Ионкина, В.С.Панферова, Р.В.Разумейко и Т.Н.Фоменко, в общении с которыми формировался этот задачник.

Г.Д.Ким, Л.В.Крицков
Май 2008 года

Список литературы

1. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– М.: Физматлит, 2003.

2. Воеводин В.В. Линейная алгебра.– М.: Наука, 1974.

3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.И. Матрицы и вычисления.– М.: Наука, 1984.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Физматлит, 2004.

5. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ.– М.: Наука, 1969.

6. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия.– М.: Физматлит, 2004.

7. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре.– М.: Лань, 2006.

8. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.– М.: Проспект, МГУ, 2007.

9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.– М.: Физматлит, 2005.

10. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том II(1), том II(2).– М.: Зерцало, 2003.

11. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том I.– М.: Планета знаний, 2007.

12. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Кн. 1: Основы алгебры. Кн. 2: Линейная алгебра. Кн. 3: Основные алгебраические структуры.– М.: Физматлит, 2004.

13. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия.– М.: Лань, 2005.

14. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.– М.: Лань, 2005.

15. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.– М.: УРСС, 2004.

16. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры.– М.: Наука, 1996.

17. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.– М.: Бином, 2005.

18. Сборник задач по алгебре / Под ред. Кострикина А.И. – М.: Физматлит, 2001.

19. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре.– М.: Лань, 2001.

20. Халмош П. Конечномерные векторные пространства.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

21. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.– М.: Мир, 1989.

22. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства).– М.: Наука, 1969.

Глава XII. Линейное пространство над произвольным полем

§44. Определение и основные свойства

Пусть дано поле P. Непустое множество V называется *линейным* или *векторным пространством над полем* P, если на этом множестве определены внутренний закон композиции $V \times V \to V$, называемый сложением, и внешний закон композиции $P \times V \to V$, называемый умножением на число из поля P, удовлетворяющие следующим аксиомам: для любых $a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$

1) $a + b = b + a$;

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3) существует элемент $\theta \in V$ такой, что $a + \theta = \theta + a = a$;

4) для любого элемента $a \in V$ существует элемент $-a \in V$ такой, что $a + (-a) = (-a) + a = \theta$;

5) $1 \cdot a = a$;

6) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

8) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$ называется *рациональным*, над полем $\mathbb{R}$ – *вещественным*, а над полем $\mathbb{C}$ – *комплексным линейным пространством.*

Понятия линейной зависимости, базиса и размерности линейного пространства, линейного подпространства и линейного многообразия, рассмотренные применительно к вещественным линейным пространствам в главе IV части 1, сохраняются и в линейном пространстве над произвольным полем. Практически неизменными остаются и все теоремы (а также их доказательства), относящиеся к этим понятиям. Незначительное изменение коснется лишь формулировок: в них добавится уточнение, какое именно поле рассматривается. Безусловно, это сходство с вещественными линейными пространствами относится к тем общим свойствам линейных пространств, которые опираются лишь на аксиомы поля. Частные же особенности поля (такие, например, как конечность поля или отличие от нуля его характеристики) могут сделать свойства линейного пространства исключительными (пример 44.4, задачи 44.11–44.15, 44.93, 45.26, 45.48).

Приведем теперь некоторые дополнительные понятия и факты, связанные с линейными пространствами над произвольным полем.

Линейно независимая подсистема системы векторов, через которую линейно выражается любой вектор системы, называется *базой* этой системы векторов.

Теорема 44.1. *Подсистема системы векторов является базой системы векторов тогда и только тогда, когда образует максимальную линейно независимую подсистему.*

Следствие. Все базы одной системы векторов состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов системы.

Число векторов базы называется *рангом системы векторов*. Очевидно, ранг системы векторов равен максимальному числу линейно независимых векторов системы. Обозначение: $\operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_n)$.

Две системы векторов линейного пространства называются *эквивалентными*, если любой вектор каждой из этих систем линейно выражается через другую систему. Из определения следует, что *база системы векторов эквивалентна самой системе.*

Теорема 44.2. *Если система векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_m$, то $\operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_k) \leq \operatorname{rg}(b_1, \ldots, b_m)$.*

Следствие 1. *Ранги эквивалентных систем совпадают.*

Следствие 2. *Эквивалентные линейно независимые системы векторов состоят из одинакового числа векторов.*

Говорят, что *система векторов* $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства V *порождает пространство* V, если любой вектор $x \in V$ является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_n$.

В этой терминологии базис линейного пространства V – это линейно независимая система векторов, порождающая все пространство V.

Теорема 44.3 (о неполном базисе). *В n-мерном пространстве любую линейно независимую систему из k, где $k < n$, векторов можно дополнить до базиса.*

Пример 44.1. Арифметическое пространство P^n. Пусть P – поле, а P^n – множество всевозможных упорядоченных наборов n чисел из поля P, т.е. $P^n = \{a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) | \, a_i \in P, i = \overline{1,n}\}$. Два арифметических вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называются равными, если $a_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$. Введем в P^n операции по следующим правилам:

а) если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$

б) для любого числа $\alpha \in P$ и вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$$\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Нетрудно проверить, что P^n – линейное пространство над полем P.

Единичные векторы

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \; e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \; \ldots, \; e_n = (0, 0, \ldots, 1) \qquad (44.1)$$

образуют базис P^n (см. пример 17.2), называемый *естественным базисом* пространства P^n, координатами вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в естественном базисе служат его компоненты $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В частности, $\mathbb{C}^n$ – комплексное линейное пространство, $\dim \mathbb{C}^n = n$ и векторы (44.1) образуют его базис.

Пример 44.2. Арифметическое пространство $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. В линейном пространстве $\mathbb{C}^n$ векторы умножаются на комплексные числа. Однако можно было бы ограничиться умножением только на вещественные числа, при этом результат умножения, несомненно, останется арифметическим вектором из $\mathbb{C}^n$. Это означает, что внешний закон композиции можно вводить и как умножение на вещественные числа, т.е. как отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Символом $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ будем обозначать множество $\mathbb{C}^n$, в котором внешний закон композиции определен как $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Нетрудно проверить, что $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ – вещественное линейное пространство.

В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ векторы (44.1) не могут быть базисом, так как умножением этих векторов только на вещественные числа

нельзя получить любой комплексный арифметический вектор $a = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$, где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$. Добавим к векторам (44.1) еще n векторов:

$$f_1 = (i, 0, \ldots, 0),\ f_2 = (0, i, \ldots, 0),\ \ldots,\ f_n = (0, 0, \ldots, i).$$

Покажем, что система векторов $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ образует базис $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. Действительно, линейная комбинация этих векторов с вещественными коэффициентами α_k, β_k имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_k e_k + \sum_{i=1}^{n} \beta_k f_k = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n) \tag{44.2}$$

и равна нулевому вектору $\theta = (0, \ldots, 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_k + i\beta_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, т.е. $\alpha_k = \beta_k = 0$, $k = \overline{1,n}$. Следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы. Они порождают все пространство $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$, так как любой вектор $(\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$ из $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ согласно (44.2) является линейной комбинацией этих векторов с вещественными коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$.

Итак, $\dim \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}} = 2n$.

В частности, само поле $\mathbb{C}$ можно рассматривать как вещественное линейное пространство $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. В этом случае $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$, а естественным базисом служат числа 1 и i.

Пример 44.3. Множество $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, в котором операции сложения и умножения выполняются по правилам

+	0	1
0	0	1
1	1	0

и

·	0	1
0	0	0
1	0	1

соответственно, образует, как нетрудно проверить, поле. Как и любое поле, оно является линейным пространством над самим собой.

Заметим, что это поле есть ничто иное как поле вычетов $\{C_0, C_1\}$ по модулю 2, в котором каждый из классов представлен своим элементом. Операции сложения и умножения в $\mathbb{Z}_2$ введены по правилам:

1) сумма m и n есть остаток от деления обычной суммы $m + n$ на 2,

2) произведение m и n есть остаток от деления обычного произведения mn на 2.

Такая операция сложения (умножения) называется *сложением* (соответственно *умножением*) *по модулю* 2 и обозначается $(m + n) \bmod 2$ (соответственно $(mn) \bmod 2$).

Аналогичным образом могут быть введены алгебраические операции и в $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Пример 44.4. Пусть $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множество, состоящее из n элементов. На множестве всех его подмножеств V определим операции сложения и умножения на числа из поля $\mathbb{Z}_2$ (см. предыдущий пример) по правилам:

$$X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y),$$
$$1 \cdot X = X, \quad 0 \cdot X = \varnothing.$$

Нетрудно проверить (например, на кругах Эйлера[1]), что относительно этих

[1] См. §10 [11].

операций множество V является линейным пространством над полем $\mathbf{Z}_2$. Отметим, что в этом пространстве $\theta = \varnothing$, $-X = X$.

Покажем, что подмножества $X_1 = \{a_1\}$, $X_2 = \{a_2\}, \ldots, X_n = \{a_n\}$ образуют базис V. Во-первых, они образуют линейно независимую систему, так как никакая нетривиальная линейная комбинация (т.е. с коэффициентами, равными 1) этих подмножеств не равна θ: $1 \cdot X_{i_1} + 1 \cdot X_{i_2} + \ldots + 1 \cdot X_{i_k} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} \neq \varnothing$. Во-вторых, как следует из последнего равенства, любое подмножество является линейной комбинацией подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Таким образом, $\dim V = n$.

Отметим также, что число всех векторов в пространстве V конечно и равно 2^n.

Пример 44.5. Доказать, что линейное пространство $\mathbf{R}_{\mathbf{Q}}$ вещественных чисел над полем рациональных чисел бесконечномерно.

Решение. Покажем, что для любого натурального числа n можно указать n вещественных чисел, линейно независимых над полем $\mathbf{Q}$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – произвольные различные простые числа и

$$x_1 = \log_2 p_1, \quad x_2 = \log_2 p_2, \ \ldots, \ x_n = \log_2 p_n.$$

Покажем, что если

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \tag{44.3}$$

для некоторых рациональных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Без ограничения общности можно считать, что все коэффициенты в левой части (44.3) целые: $\alpha_i = k_i \in \mathbf{Z}$, $i = \overline{1,n}$ (в противном случае, т.е. если $\alpha_i = \dfrac{k_i}{m_i}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$, достаточно умножить обе части равенства (44.3) на наименьшее общее кратное знаменателей $m_1, m_2, \ldots, m_n$). Таким образом, выполнено равенство

$$k_1 \log_2 p_1 + k_2 \log_2 p_2 + \ldots + k_n \log_2 p_n = 0 \tag{44.4}$$

или, что тоже самое,

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} = 1. \tag{44.5}$$

Если все показатели степени $k_1, k_2, \ldots, k_n$ в левой части (44.5) неотрицательны, то так как $p_i \neq 1$, $i = \overline{1,n}$, то $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Если же среди чисел $k_1, \ldots, k_n$ есть отрицательные – например,

$$k_1 < 0, \ \ldots, \ k_s < 0, \ k_{s+1} \geq 0, \ \ldots, \ k_n \geq 0,$$

то из (44.5) следует, что

$$p_{s+1}^{k_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} = p_1^{|k_1|} \cdot \ldots \cdot p_s^{|k_s|},$$

что противоречит единственности разложения натурального числа на простые множители.

Таким образом, равенство (44.3) с целыми, а следовательно, и с рациональными коэффициентами возможно тогда и только тогда, когда все эти коэффициенты нулевые. ▪

Два линейных пространства V_1 и V_2 над общим полем P называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для любых векторов $x, y \in V_1$ и любого числа $\alpha \in P$

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$;
2) $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$.

Обозначение: $V_1 \cong V_2$. Само отображение φ называется *изоморфизмом линейных пространств.*

Пример 44.6. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3 векторов на прямой, на плоскости и в пространстве изоморфны арифметическим пространствам $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно. Действительно, поставим в соответствие каждому вектору $\mathbf{x} \in V_n$ набор его координат в каком-либо базисе e, т.е. арифметический вектор $x_e \in \mathbb{R}^n$, где $n = 1, 2, 3$. Это соответствие взаимно однозначно и сохраняет законы композиции, так как координаты вектора обладают свойством линейности.

Пример 44.7. $V_2 \cong \mathbf{C}_{\mathbf{R}} \cong \mathbb{R}^2$.

Пример 44.8. $P^{m\times n} \cong P^{mn}$, и в частности $\mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$.

Теорема 44.4. *Отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности на множестве всех линейных пространств над полем P.*

Теорема 44.5. *В изоморфных пространствах:*

а) образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;

б) образ (и прообраз) нулевого вектора есть нулевой вектор;

в) образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;

г) образ (и прообраз) базиса есть базис.

Теорема 44.6 (критерий изоморфизма). *Два конечномерных линейных пространства над общим полем изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Следствие. Любое n-мерное вещественное пространство изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$, а любое n-мерное комплексное пространство – арифметическому пространству $\mathbf{C}^n$.

ЗАДАЧИ

Примеры и простейшие свойства линейного пространства

44.1. Доказать, что в линейном пространстве над полем P для выполнения равенства $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y$, где $\alpha, \beta \in P$, x, y – векторы пространства, необходимо и достаточно, чтобы либо $\alpha = \beta$, либо $x = y$.

44.2. Не пользуясь коммутативностью сложения векторов, доказать, что правые противоположный и нулевой элементы будут одновременно левыми.

44.3. Доказать, что коммутативность сложения векторов вытекает из остальных аксиом линейного пространства.

44.4. На множестве $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар действительных чисел введена операция сложения по правилу:

если $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$, то $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Ввести операцию умножения пары (a_1, a_2) на действительное число α так, чтобы:

а) были выполнены все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы

$$1 \cdot a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}^2;$$

б) были выполнены все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \forall a \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

44.5. На множестве $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар действительных чисел введены следующие операции:

если $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$, то $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$;

для любого комплексного числа $\alpha = \lambda + i\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$$\alpha(a_1, a_2) = (\lambda a_1 + \mu a_2, -\mu a_1 + \lambda a_2).$$

Доказать, что множество $\mathbb{R}^2$ с так введенными операциями является комплексным линейным пространством.

44.6. На множестве $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар действительных чисел введена операция сложения по правилу:

если $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$, то $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Ввести операцию умножения пары (a_1, a_2) на комплексное число α так, чтобы были выполнены все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad \forall a \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

44.7. В комплексном линейном пространстве V определена новая операция умножения на число по правилу $\alpha \circ x = \overline{\alpha} x$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Доказать, что V является комплексным линейным пространством относительно старой операции сложения векторов и новой операции умножения на число.

44.8. Найти ошибку в следующем «доказательстве» того, что аксиома $1 \cdot a = a \ \forall a \in V$ вытекает из других аксиом линейного пространства: «Пусть $a = ab$, тогда $1 \cdot a = 1(ab) = (1 \cdot a)b = ab = a$».

44.9. На множестве $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел определены следующие операции:

а) «сложение» $x \oplus y = xy$ (т.е. обычное умножение x и y);

б) «умножение на действительное число» $\alpha \odot x = x^\alpha$ (т.е. возведение x в степень α).

Показать, что множество $\mathbb{R}_+$ относительно указанных операций образует вещественное линейное пространство.

44.10. Пусть V – множество всех функций, заданных и принимающих положительные значения на отрезке $[a, b]$. Определим сложение двух функций и умножение функции на число равенствами:

$$f \oplus g = fg, \quad \alpha \odot f = f^{\alpha}, \qquad f, g \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

а) Проверить, что относительно указанных операций V является вещественным линейным пространством.

б) Доказать, что пространство V изоморфно пространству V_1 всех действительных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число.

44.11. Пусть P – поле, F – его подполе.

а) Доказать, что P является линейным пространством над полем F.

б) Найти базис и размерность поля $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$.

в) Пусть $m_1, \ldots, m_n$ – различные натуральные числа, каждое из которых не делится на квадрат простого числа. Доказать, что числа $1, \sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_n}$ линейно независимы в пространстве $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.

г) Пусть $r_1, \ldots, r_n$ – различные рациональные числа из интервала $(0, 1)$. Доказать, что числа $2^{r_1}, \ldots, 2^{r_n}$ линейно независимы в пространстве $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.

44.12. Пусть p – простое число и $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ – множество, в котором операции сложения и умножения вводится по правилам (см. пример 44.3):

$$x \oplus y = (x + y) \bmod p, \; x \odot y = (xy) \bmod p.$$

а) Показать, что $\mathbb{Z}_p$ образует поле, и следовательно, является линейным пространством над самим собой.

б) Ввести структуру линейного пространства на множестве $\mathbb{Z}_p^n$ всевозможных арифметических векторов, в которых каждая компонента равна одному из чисел множества $\mathbb{Z}_p$.

в) Найти общее число векторов в линейном пространстве $\mathbb{Z}_p^n$ и его размерность.

44.13. Привести примеры линейных пространств, состоящих из n векторов, если: а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$; г) $n = 4$.

44.14. Показать, что если линейное пространство V содержит конечное число векторов, бóльшее одного, то его основное поле конечно.

44.15. Существует ли линейное пространство, состоящее из шести векторов?

44.15.1. Пусть G – абелева группа. Доказать, что на множестве G можно ввести операцию умножения на числа из поля $\mathbb{Z}_2$ так, чтобы группа G стала линейным пространством над $\mathbb{Z}_2$.

44.16. Пусть V – линейное пространство всех подмножеств конечного множества M из n элементов над полем $\mathbb{Z}_2$ (см. пример 44.4). Доказать, что если ни одно из подмножеств $X_1, \ldots, X_k$ этого множества не содержится в объединении остальных, то эти подмножества составляют в V линейно независимую систему.

44.17. Доказать, что пространство V всех подмножеств множества M из n элементов (см. пример 44.4) и арифметическое пространство $\mathbb{Z}_2^n$ изоморфны как линейные пространства над полем $\mathbb{Z}_2$. Указать какой-либо изоморфизм между ними.

Линейная зависимость. Ранг и база системы векторов

44.18. Два вектора a и b линейного пространства V над полем P называются *коллинеарными*, если существует такое число $\alpha \in P$, что либо $a = \alpha b$, либо $b = \alpha a$. Выяснить, являются ли коллинеарными следующие пары векторов комплексных арифметических пространств:

а) $(1, 1+i, 2, 2-3i)$, $(i, 1-i, 2+i, -1)$;

б) $(1, i, 2-i, 3+i)$, $(1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$.

Будут ли они коллинеарны как векторы соответствующих вещественных арифметических пространств?

44.19. Пусть в пространстве V над полем P задан некоторый базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда каждому вектору $x \in V$ можно поставить в соответствие строку его координат в этом базисе:

$$x \mapsto x'_e = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Доказать, что:

а) линейная зависимость (линейная независимость) системы векторов $x, y, \ldots, z$ равносильна линейной зависимости (соответственно линейной независимости) системы строк $x'_e, y'_e, \ldots, z'_e$, рассматриваемых как элементы соответствующего арифметического пространства P^n;

б) ранг системы векторов $x, y, \ldots, z$ равен рангу системы строк $x'_e, y'_e, \ldots, z'_e$;

в) если вектор a линейно выражается через систему $x, y, \ldots, z$, т.е. $a = \lambda x + \mu y + \ldots + \nu z$, то это же верно и для строк a'_e, x'_e, $y'_e, \ldots, z'_e$, причем $a'_e = \lambda x'_e + \mu y'_e + \ldots + \nu z'_e$.

44.20. Выяснить, являются ли следующие системы матриц линейно зависимыми:

а) $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Зависит ли ответ от того, каким является пространство – вещественным или комплексным?

44.21. Выяснить, являются ли следующие системы многочленов линейно зависимыми:

а) $p(it)$, $p(-it)$, $p(t)$, $p(-t)$, где $p(t) = t^3 + t^2 + t + 1$;

б) $t - i$, $t + i$, $(t - i)^2$, $(t + i)^2$.

Зависит ли ответ от того, каким является пространство – вещественным или комплексным?

44.22. Доказать, что если какой-либо вектор линейного пространства единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, то эта система векторов линейно независима.

44.23. Доказать, что если каждый вектор линейно независимой системы $x_1, \ldots, x_n$ линейно выражается через векторы $y_1, \ldots, y_m$, то $n \leq m$.

Найти ранг следующих систем векторов и выяснить, зависит ли ответ от того, какому пространству – вещественному или комплексному – принадлежат эти векторы.

44.24. $x_1 = (1, 2, 3)$,
$x_2 = (6, 5, 4)$,
$x_3 = (7, 8, 9)$,
$x_4 = (12, 11, 10)$.

44.25. $x_1 = (1, 4, 7, 10)$,
$x_2 = (2, 5, 8, 11)$,
$x_3 = (3, 6, 9, 12)$.

44.26. $x_1 = (1, -1, 0, 0)$,
$x_2 = (0, 1, -1, 0)$,
$x_3 = (0, 0, 1, -1)$,
$x_4 = (0, 0, 0, -1)$,
$x_5 = (7, -3, -4, 5)$.

44.27. $x_1 = (1, -1, 0, 0)$,
$x_2 = (0, 1, -1, 0)$,
$x_3 = (0, 0, 1, -1)$,
$x_4 = (1, 0, 0, -1)$.

44.28. $x_1 = (1, 10, 0, 0)$,
$x_2 = (0, 1, 10, 0)$,
$x_3 = (0, 0, 1, 10)$,
$x_4 = (10^{-3}, 0, 0, 1)$.

44.29. $x_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$,
$x_2 = (1, i, -1, -i, 1)$,
$x_3 = (1, -1, 1, -1, 1)$,
$x_4 = (1, -i, -1, i, 1)$.

44.30. $x_1 = (3-i, 1-2i, -7+5i, 4+3i)$,
$x_2 = (1+3i, 1+i, -6-7i, 4i)$,
$x_3 = (0, 1, 1, -3)$.

44.31. $p_1(t) = t^4-1$, $p_2(t) = t^2-1$, $p_3(t) = t^2+1$, $p_4(t) = t+1$, $p_5(t) = t-1$.

44.32. $p_1(t) = (t+1)^2$, $p_2(t) = (t-1)^2$, $p_3(t) = (t+1)^3$, $p_4(t) = (t-1)^3$, $p_5(t) = (t+1)^4$, $p_6(t) = (t-1)^4$.

44.33. $p_1(t) = (t-1)^4$, $p_2(t) = (t-1)^3(t+1)$, $p_3(t) = (t-1)^2(t+1)^2$, $p_4(t) = (t-1)(t+1)^3$, $p_5(t) = (t+1)^4$.

44.34. $p_1(t) = t+i$, $p_2(t) = t-i$, $p_3(t) = t+1$, $p_4(t) = t-1$.

44.35. A, A^2, A^3, A^4, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

44.36. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 2-i & 0 & 1-i \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & i \\ 0 & 1+i & 2+i \end{bmatrix}$,
$A_3 = \begin{bmatrix} 1+i & -2 & -1 \\ 1+2i & -1-i & -1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 1-i & 2i & i \\ 2-i & -1+i & i \end{bmatrix}$.

44.37. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ i & 1-i \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} i & -1+i \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 2-i & 3+i \\ 1+2i & 1-3i \end{bmatrix}$.

44.38. Существует ли система векторов из $\mathbb{C}^n$, которые коллинеарны как элементы комплексного пространства, а как элементы вещественного пространства имеют ранг, больший двух?

44.39. Известно, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ имеет ранг r как система векторов комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Доказать, что ранг этой системы в вещественном пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ не превосходит $2r$.

Для каждой из следующих систем векторов найти ранг и какую-нибудь базу.

44.40. $x_1 = (1, -4, 3, 2)$,
$x_2 = (3, -7, 5, 3)$,
$x_3 = (3, -2, 1, 0)$,
$x_4 = (-4, 1, 0, 1)$.

44.41. $x_1 = (0, 2, -1)$,
$x_2 = (3, 7, 1)$,
$x_3 = (2, 0, 3)$,
$x_4 = (5, 1, 8)$.

44.42. $p_1(t) = 3t^2 + 2t + 1$,
$p_2(t) = 4t^2 + 3t + 2$,
$p_3(t) = 3t^2 + 2t + 3$,
$p_4(t) = t^2 + t + 1$,
$p_5(t) = 4t^2 + 3t + 4$.

44.43. $p_1(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$,
$p_2(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4t + 5$,
$p_3(t) = 3t^3 + 4t^2 + 5t + 6$,
$p_4(t) = 4t^3 + 5t^2 + 6t + 7$.

6304 1086

44.44. A, A^T, AA^T, A^2, A^3, A^4, где $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

44.45. A, B, B^T, AB, AB^T, BA, B^TA, BB^T, B^TB, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

44.46. В системе $x_1, \ldots, x_m$ первые r векторов образуют базу, а x_l – ненулевой вектор, не входящий в эту базу. Доказать, что среди векторов базы найдется вектор x_j, $1 \leq j \leq r$, такой, что при замене его в подсистеме $x_1, \ldots, x_r$ вектором x_l получится новая база заданной системы $x_1, \ldots, x_m$. Будет ли такой вектор x_j единственным?

44.47. Что можно сказать о системе векторов ранга r, если она имеет: а) единственную базу; б) ровно две базы; в) ровно три базы? Две базы, отличающиеся лишь порядком векторов, считаются одинаковыми.

Найти все базы следующих систем векторов.

44.48. $x_1 = (4, -2, 12, 8)$,
$x_2 = (-6, 12, 9, -3)$,
$x_3 = (-10, 5, -30, -20)$,
$x_4 = (-14, 28, 21, -7)$.

44.49. $x_1 = (1, 2, 3, 0, -1)$,
$x_2 = (0, 1, 1, 1, 0)$,
$x_3 = (1, 3, 4, 1, -1)$.

44.50. Указать все базы системы векторов

$$x_1 = (1+i,\ 1-i, 2+3i), \quad x_2 = (i,\ 1,\ 2),$$
$$x_3 = (1-i, -1-i, 3-2i), \quad x_4 = (4, -4i, 10+2i),$$

если они рассматриваются как: а) векторы комплексного пространства; б) векторы вещественного пространства.

44.51. Даны две системы векторов:

$x_1 = (1, 1, 1)$, $y_1 = (1, 2, 3)$,
$x_2 = (1, 0, -1)$, $y_2 = (0, 1, 2)$,
$x_3 = (1, 3, 5)$, $y_3 = (3, 4, 5)$,
$y_4 = (4, 6, 8)$.

Определить, линейно выражается ли система y_1, y_2, y_3, y_4 через систему x_1, x_2, x_3.

44.52. Известно, что в системе векторов $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ векторы $y_1, \ldots, y_n$ линейно выражаются через векторы $x_1, \ldots, x_m$. Показать, что система $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ эквивалентна системе $x_1, \ldots, x_m$.

44.53. Доказать, что в каждой системе векторов $x_1, \ldots, x_m$, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, можно выбрать эквивалентную ей линейно независимую подсистему.

44.54. Даны векторы:

$a_1 = (0,1,0,2,0)$, $a_2 = (7,4,1,8,3)$, $a_3 = (0,3,0,4,0)$,
$a_4 = (1,9,5,7,1)$, $a_5 = (0,1,0,5,0)$.

Можно ли подобрать числа c_{ij}, $i,j = \overline{1,5}$, так, чтобы векторы

$$b_i = c_{i1}a_1 + c_{i2}a_2 + c_{i3}a_3 + c_{i4}a_4 + c_{i5}a_5, \quad i = \overline{1,5},$$

были линейно независимы?

44.55. Доказать, что вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ тогда и только тогда, когда ранг последней системы векторов не меняется от добавления к ней вектора b.

44.56. Доказать, что если две системы векторов имеют одинаковый ранг и одна из этих систем линейно выражается через другую, то эти системы эквивалентны.

44.57. Доказать, что если пересечение двух систем векторов $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ непусто, то

$$\operatorname{rg}(A \cap B) + \operatorname{rg}(A \cup B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

44.58. Доказать, что для любых двух систем векторов $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ справедливо неравенство

$$\operatorname{rg}(A \cup B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B,$$

причем равенство в этом соотношении выполнено тогда и только тогда, когда ни один вектор одной системы не выражается линейно через векторы другой системы.

Базис линейного пространства

44.59. Доказать, что в n-мерном линейном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис.

44.60. Доказать, что любой ненулевой вектор пространства можно включить в некоторый базис этого пространства.

44.61. Доказать, что в линейном конечномерном пространстве над бесконечным полем существует базис, не содержащий ни одного вектора из заданной системы векторов $a_1, \ldots, a_k$.

44.61.1. Доказать, что в линейном пространстве над бесконечным полем можно построить бесконечно много базисов.

44.62. В пространстве $\mathbb{R}^5$ найти три различных базиса, имеющих общие векторы $e_1 = (1,0,0,1,1)$, $e_2 = (0,1,1,0,0)$. Верно ли, что существует лишь конечное число таких базисов, в которых

системы добавляемых векторов попарно не эквивалентны?

44.63. Систему многочленов t^5+t^4, t^5-3t^3, t^5+2t^2, t^5-t дополнить до базиса пространства M_5.

44.64. Систему матриц $\begin{bmatrix}2&7&6\\6&1&4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4&8&7\\9&2&5\end{bmatrix}$ дополнить до базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

44.65. Систему матриц $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}$ дополнить до базиса пространства $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Можно ли выбрать все добавляемые матрицы кососимметрическими?

Показать, что векторы $e_1,\dots,e_n$ образуют базис арифметического пространства и найти координаты вектора x в этом базисе.

44.66. $e_1=(2,2,-1)$, $e_2=(2,-1,2)$, $e_3=(-1,2,2)$;
$x=(1,1,1)$.

44.67. $e_1=(1,5,3)$, $e_2=(2,7,3)$, $e_3=(3,9,4)$;
$x=(2-2i,7-4i,4-i)$.

44.68. $e_1=(1,2,-1,-2)$, $e_2=(2,3,0,-1)$, $e_3=(1,2,1,4)$,
$e_4=(1,3,-1,0)$; $x=(7,14,-1,2)$.

44.69. $e_1=(1,2,1,1)$, $e_2=(2,3,1,0)$, $e_3=(3,1,1,-2)$,
$e_4=(-4,4,-1,6)$; $x=(7,8,7,2)$.

44.70. Построить какой-либо базис в вещественном пространстве $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ и найти координаты в этом базисе вектора $(1+i,\ 1-2i)$.

44.71. Арифметические векторы $e_1,\dots,e_n$ образуют базис в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Доказать, что:

а) векторы $e_1,\dots,e_n,ie_1,\dots,ie_n$ образуют базис в вещественном пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$;

б) векторы $e_1,\dots,e_n,\alpha e_1,\dots,\alpha e_n$ образуют базис в вещественном пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда комплексное число α не является вещественным.

44.72. Найти координаты многочлена $t^5-t^4+t^3-t^2-t+1$ в каждом из следующих базисов пространства M_5:

а) $1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ t^4,\ t^5$;

б) $1+t^3,\ t+t^3,\ t^2+t^3,\ t^3,\ t^4+t^3,\ t^5+t^3$.

44.73. Доказать, что многочлены $2t+t^5$, t^3-t^5, $t+t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше 5, и найти координаты многочлена $5t-t^3+2t^5$ в этом базисе.

44.74. Показать, что последовательности

$$e_1=(2,3,5,8,13,\ldots),\ e_2=(1,2,3,5,8,\ldots)$$

образуют базис пространства всех последовательностей вещественных чисел $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, удовлетворяющих условию $\alpha_k=\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}$, $k\geq 3$. Разложить по этому базису последовательность $x=(1,1,2,3,5,8,\ldots)$.

44.74.1. Доказать, что линейное пространство из задачи 44.5 одномерно.

44.75. Доказать, что система матриц

$$E_1=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\ E_4=\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix}$$

образует базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Построить другой базис этого пространства так, чтобы ни одна из его матриц не выражалась линейно через какие-либо две матрицы базиса E_1, E_2, E_3, E_4.

44.76. Доказать, что матрицы

$$E_1=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\ E_4=\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}$$

образуют базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$, и найти координаты матрицы $A=\begin{bmatrix}5&14\\6&13\end{bmatrix}$ в этом базисе.

44.77. Найти координаты матрицы $\begin{bmatrix}0&2i\\2i&2\end{bmatrix}$ в каждом из следующих базисов пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$:

а) $\begin{bmatrix}1&i\\1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\1&i\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\i&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}i&1\\1&1\end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix}1&i\\i&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&i\\i&3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2&1+i\\1&i\end{bmatrix}$.

44.78. Доказать, что матрицы

$$E_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix},$$

$$E_4=\begin{bmatrix}-2&3&1\\3&6&2\\1&2&1\end{bmatrix},\ E_5=\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{bmatrix},\ E_6=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-2\end{bmatrix}$$

образуют базис пространства симметрических матриц порядка 3, и найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

Переход к другому базису

44.79. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$e_1 = (1-i, 3+2i), \quad e_2 = (-1+2i, 3-i)$$

и

$$f_1 = (1, 9+3i), \quad f_2 = (-1+3i, 9)$$

является базисом пространства $\mathbb{C}^2$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты (x_1, x_2) во втором базисе.

44.80. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$e_1 = (1, 0, i), \quad e_2 = (0, i, 1), \quad e_3 = (i, 1, 0)$$

и

$$f_1 = (1, 0, -i), \quad f_2 = (0, -i, 1), \quad f_3 = (-i, 1, 0)$$

является базисом пространства $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты (x_1, x_2, x_3) во втором базисе.

44.81. Показать, что многочлены $1, t-c, (t-c)^2, \ldots, (t-c)^n$ образуют базис в пространстве M_n, и найти координаты многочлена

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

в этом базисе.

44.82. Найти матрицу перехода от естественного базиса пространства M_n к базису $1, t-c, (t-c)^2, \ldots, (t-c)^n$.

44.83. Доказать, что каждая из двух систем матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

является базисом пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты матрицы размера 3×2 в первом базисе, если известны ее координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ во втором базисе.

44.84. Доказать, что каждая из двух систем матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

является базисом в пространстве кососимметрических матриц порядка 3, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты кососимметрической матрицы порядка 3 в первом базисе, если известны ее координаты (x_1, x_2, x_3) во втором базисе.

44.85. Доказать, что каждая из двух систем многочленов

$$t - t^2,\ t^3,\ 1 + 5t + t^3,\ (1+t)^3$$

и

$$(1+t)^3,\ (1-t)^3,\ t - t^2 + t^3,\ 1 + t + t^2 + t^3$$

является базисом пространства M_3. Найти координаты многочлена степени не выше 3 в первом базисе, если известны его координаты (x_1, x_2, x_3, x_4) во втором базисе.

44.86. Доказать, что каждая из двух систем многочленов

$$(1+t^2)^2,\ (1-t^2)^2,\ 1$$

и

$$1 + t^2 + t^4,\ 1 - t^2 + t^4,\ t^4$$

является базисом в пространстве четных многочленов степени не выше 4, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты четного многочлена степени не выше 4 в первом базисе, если известны координаты (x_1, x_2, x_3) во втором базисе.

44.87. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

а) поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;

б) поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;

в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

44.88. Матрица S является матрицей перехода от первого базиса $e_1,\ldots,e_n$ ко второму базису $f_1,\ldots,f_n$ n-мерного пространства V, а матрица Q – матрицей перехода от третьего базиса $g_1,\ldots,g_n$ ко второму базису $f_1,\ldots,f_n$. Найти матрицу перехода:

а) от второго базиса к первому;

б) от первого базиса к третьему.

44.89. Как связаны между собой базисы $f_1,\ldots,f_n$ и $e_1,\ldots,e_n$ пространства V, если матрица перехода от базиса e к f:

а) диагональная;

б) скалярная;

в) верхняя треугольная;

г) нижняя треугольная?

44.90. В n-мерном линейном пространстве заданы векторы $e_1,\ldots,e_m$, причем $m \geq n+2$. Доказать, что существуют такие числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, не все равные нулю, что

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i = \theta \text{ и } \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 0.$$

44.91. Доказать, что система векторов линейного пространства является базисом тогда и только тогда, когда она образует минимальную систему векторов, порождающую все пространство.

44.91.1. В n-мерном линейном пространстве V над полем P задан произвольный ненулевой вектор x. Доказать, что для любого ненулевого вектор-столбца $a = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^T \in P^{n\times 1}$ можно выбрать базис $e_1,\ldots,e_n$ пространства V, в котором координаты вектора x совпадают с компонентами a:

$$x_e = a.$$

44.92. Пусть $e_1,\ldots,e_n$ и $f_1,\ldots,f_n$ – два базиса линейного пространства V и $1 \leq k < n$. Доказать, что из векторов второго базиса можно выбрать такие k векторов, что после обмена их с векторами $e_1,\ldots,e_k$ из первого базиса получатся снова два базиса пространства V.

44.93. Векторы $x_1,\ldots,x_k \in V$ линейно независимы, а базис $e_1,\ldots,e_n$ пространства V таков, что он остается базисом после замены вектора e_i на вектор x_i при любом $i = \overline{1,k}$. Верно ли, что векторы $x_1,\ldots,x_k,e_{k+1},\ldots,e_n$ тоже образуют базис пространства V?

44.94. Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем P, состоящим из q элементов. Найти:

а) число векторов в пространстве V;

б) число базисов пространства V;

в) число невырожденных матриц n-го порядка над полем P.

§45. Линейное подпространство

Непустое подмножество L пространства V называется *линейным подпространством пространства* V, если оно само является линейным пространством относительно законов композиции, действующих в V. Другое определение линейного подпространства, эквивалентное этому, устанавливается теоремой 18.1, которая имеет место и в общем случае.

Как указывалось в §22, множество всех решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0 \tag{45.1}$$

с n неизвестными образует линейное подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. В общем случае, когда $A \in P^{m\times n}$, множество всех решений системы (45.1) образует подпространство L линейного пространства P^n, причем его размерность также равна $n - \operatorname{rg} A$.

О таком подпространстве говорят, что оно задано однородной системой (45.1), и записывают это в виде

$$L:\ Ax = 0.$$

Другой способ задания линейного подпространства связан с понятием линейной оболочки.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – система векторов линейного пространства V над полем P. *Линейной оболочкой системы векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Говорят также, что линейная оболочка *натянута на векторы* $a_1, a_2 \ldots, a_k$. Обозначение: $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$. Итак,

$$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = \left\{ a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \,|\, \alpha_i \in P,\ i = \overline{1,k} \right\}.$$

Из определения следует, что каждое конечномерное пространство является линейной оболочкой векторов своего базиса.

Теорема 45.1. *Если* $a_1, \ldots, a_k$ *– векторы линейного пространства* V, *то* $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ *является линейным подпространством пространства* V.

Теорема 45.2. *Две системы векторов линейного пространства эквивалентны тогда и только тогда, когда их линейные оболочки совпадают.*

Следствие 1. *Линейная оболочка системы векторов совпадает с линейной оболочкой своей базы.*

Следствие 2. *Размерность линейной оболочки системы векторов равна рангу этой системы:*

$$\dim \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = \operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_k).$$

Пример 45.1. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, натянутой на векторы $a_1 = (1, 2, 3, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, 2, 4, 1)$, $a_3 = (3, 4, 7, 9, 2)$, $a_4 = (1, 0, 1, 7, 2)$.

Решение. Составим из векторов a_1, a_2, a_3, a_4 матрицу, расположив их компоненты по-строчно и указав в конце каждой строки наименование соответствующего вектора:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix}. \tag{45.2}$$

Отметим, что любое элементарное преобразование строк этой матрицы приводит к новому набору строк, которые остаются в исходной линейной оболочке L. Приведем матрицу (45.2) элементарными преобразованиями строк к верхней ступенчатой форме:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - 3a_1 \\ a_4 - a_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - 2a_2 - a_1 \\ a_4 - 2a_2 + a_1 \end{matrix}.$$

Из последней матрицы следует, что:

– векторы a_3, a_4 являются линейными комбинациями векторов a_1 и a_2: $a_3 = a_1 + 2a_2$, $a_4 = -a_1 + 2a_2$,

– векторы a_1, $a_2 - a_1$, а следовательно, и векторы a_1, a_2 линейно независимы.

Таким образом, $\dim L = 2$ и векторы a_1, a_2 образуют базу системы векторов a_1, a_2, a_3, a_4, и поэтому являются базисом линейной оболочки L.

Отметим, что в качестве базиса L может быть выбрана не только база рассматриваемой системы векторов, но и, например, ненулевые строки полученной верхней ступенчатой формы, т.е. векторы $a_1 = (1, 2, 3, 1, 0)$, $a_2 - a_1 = (0, -1, -1, 3, 1)$. ▪

Пример 45.2. Составить однородную систему алгебраических уравнений, множество решений которой совпадает с линейной оболочкой L, рассмотренной в предыдущем примере.

Решение. Вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежит линейной оболочке $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ тогда и только тогда, когда найдутся постоянные α_1, α_2, α_3, α_4 такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = x. \tag{45.3}$$

Равенство (45.3) относительно α_j, $j = \overline{1,4}$, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с расширенной матрицей

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & x_2 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & x_3 \\ 1 & 4 & 9 & 7 & x_4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & x_5 \end{array}\right], \tag{45.4}$$

а существование коэффициентов α_j, $j = \overline{1,4}$, в этом соотношении равносильно совместности системы с расширенной матрицей (45.4).

Исследуем совместность этой системы методом Гаусса:

$$B \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & x_5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 3 & 6 & 6 & x_4 - x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & x_2 - 2x_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 - 2x_1 + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - 3x_1 + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 - 3x_5 \end{array}\right].$$

Таким образом, для совместности системы, и следовательно, для того, чтобы вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежал линейной оболочке $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, необходимо и достаточно, чтобы вектор x был решением системы

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_3 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \blacksquare$$

Теорема 45.3 (о монотонности размерности). *Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пространства. Подпространство той же размерности, что и все пространство, с ним совпадает.*

Суммой подпространств $L_1, \ldots, L_k$ называется множество

$$\sum_{i=1}^{k} L_i = \{x = x_1 + \ldots + x_k \,|\, x_i \in L_i,\ i = \overline{1,k}\}.$$

Представление $x = x_1 + \ldots + x_k$ вектора x называется его *разложением по подпространствам* $L_1, \ldots, L_k$.

Пересечением подпространств $L_1, \ldots, L_k$ называется множество

$$L_1 \cap \ldots \cap L_k = \{x \in V \,|\, x \in L_i,\ i = \overline{1,k}\}.$$

Теорема 45.4. *Сумма и пересечение подпространств линейного пространства V являются его линейными подпространствами.*

Теорема 45.5. *Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств.*

Следствие. Размерность суммы линейных подпространств равна рангу совокупности базисов слагаемых подпространств:

$$\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_s, \ldots, g_1, \ldots, g_t),$$

где $e_1, \ldots, e_m$, $f_1, \ldots, f_s, \ldots, g_1, \ldots, g_t$ – базисы подпространств L_1, $L_2, \ldots$, L_k соответственно.

Теорема 45.6. *Для любых двух линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства V имеет место соотношение*

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2.$$

Пример 45.3. Найти размерность и какой-либо базис суммы подпространств L_1 и L_2, натянутых на системы векторов

$$\begin{array}{ll} a_1 = (1,1,1,1), & b_1 = (1,-1,-1,1), \\ a_2 = (1,1,-1,-1), \quad \text{и} & b_2 = (3,-3,-1,1), \\ a_3 = (1,-1,1,-1) & b_3 = (3,-1,1,1) \end{array}$$

соответственно.

Решение. В силу теоремы 45.5

$$L_1 + L_2 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3).$$

Найдем базис этой линейной оболочки методом, описанным в примере

45.1:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\3&-3&-1&1\\3&-1&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\\b_1\\b_2\\b_3\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\\0&-6&-4&-2\\0&-4&-2&-2\end{bmatrix}\begin{matrix}a_1\\a_2-a_1\\a_3-a_1\\b_1-a_1\\b_2-3a_1\\b_3-3a_1\end{matrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&-2\\0&0&-2&2\\0&0&-4&4\\0&0&-2&2\end{bmatrix}\begin{matrix}a_1\\a_3-a_1\\a_2-a_1\\b_1-a_3\\b_2-3a_1\\b_3-a_1-2a_3\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&2\\0&0&0&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}a_1\\a_3-a_1\\b_1-a_3\\a_2-a_1+a_3-b_1\\b_2-2b_1-a_3\\b_3-b_1-a_1-a_3\end{matrix}.$$

Следовательно, $\dim(L_1+L_2)=4$ и базис суммы L_1+L_2 образуют, например, векторы

$$(1,1,1,1),\ (0,-2,0,-2),\ (0,0,-2,2),\ (0,0,0,-4)$$

или векторы a_1, a_2, a_3, b_1 исходных систем. ▪

Пример 45.4. Найти размерность и какой-либо базис пересечения подпространств L_1 и L_2 из предыдущего примера.

Решение. 1-й способ. Опишем каждое из подпространств L_1 и L_2 однородной системой линейных алгебраических уравнений (см. пример 45.2):

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x_1\\1&1&-1&x_2\\1&-1&1&x_3\\1&-1&-1&x_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x_1\\0&0&-2&x_2-x_1\\0&-2&0&x_3-x_1\\0&-2&-2&x_4-x_1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x_1\\0&-2&0&x_3-x_1\\0&0&-2&x_2-x_1\\0&0&0&x_4-x_3-x_2+x_1\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&3&x_1\\-1&-3&-1&x_2\\-1&-1&1&x_3\\1&1&1&x_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&3&x_1\\0&0&2&x_2+x_1\\0&2&4&x_3+x_1\\0&-2&-2&x_4-x_1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&3&x_1\\0&2&4&x_3+x_1\\0&0&2&x_2+x_1\\0&0&0&x_4+x_3-x_2-x_1\end{array}\right].$$

Таким образом,

$$L_1:\ x_1-x_2-x_3+x_4=0;\qquad L_2:\ -x_1-x_2+x_3+x_4=0.$$

Вектор $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ принадлежит пересечению $L_1\cap L_2$ тогда и только тогда, когда его компоненты удовлетворяют обеим системам, описывающим подпространства L_1 и L_2:

$$L_1\cap L_2:\ \begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\-x_1-x_2+x_3+x_4=0.\end{cases}\tag{45.5}$$

Тем самым, базисом пересечения $L_1\cap L_2$ является фундаментальная система решений однородной системы (45.5). Построим ее методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\-1&-1&1&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\0&-2&0&2&0\end{array}\right].$$

Следовательно, векторы $e_1=(0,1,0,1)$, $e_2=(1,0,1,0)$ образуют базис пересечения и $\dim(L_1\cap L_2)=2$.

2-й способ. Вектор x принадлежит пересечению $L_1\cap L_2$ тогда и только тогда, когда он представим в виде линейной комбинации как векторов

a_1, a_2, a_3, так и векторов b_1, b_2, b_3, т.е. найдутся постоянные α_j, β_j, $j = \overline{1,3}$, такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3. \qquad (45.6)$$

Правое равенство в (45.6) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_j, β_j, $j = \overline{1,3}$. Найдем ее фундаментальную систему решений:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Фундаментальная система такой однородной системы уравнений содержит два решения:

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
1	0	1	−1	0	1
0	0	1	−2	1	0

Из равенства (45.6) получим, что набору $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$ (а также набору $\beta_1 = -1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$) соответствует вектор $e_1 = (2, 0, 2, 0)$, а набору $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$ ($\beta_1 = -2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0$) – вектор $e_2 = (1, -1, 1, -1)$. Эти векторы линейно независимы и, как следует из определения фундаментальной системы решений системы (45.6), через них линейно выражаются все векторы x, представимые в виде (45.6). Следовательно, e_1, e_2 – базис $L_1 \cap L_2$ и $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$.

Заметим, что для построения e_1 и e_2 достаточно определить только набор значений $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (или только $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$). ▪

Сумма подпространств линейного пространства называется *прямой суммой*, если разложение каждого вектора в ней по слагаемым подпространствам единственно. Обозначение: $L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Теорема 45.7 (критерии прямой суммы). *Для подпространств $L_1, \ldots, L_k$ конечномерного линейного пространства V следующие утверждения равносильны:*

1) *сумма подпространств $L_1, \ldots, L_k$ – прямая;*

2) *совокупность базисов подпространств $L_1, \ldots, L_k$ линейно независима;*

3) *совокупность базисов подпространств $L_1, \ldots, L_k$ образует базис суммы $\sum_{i=1}^{k} L_i$;*

4) $\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \sum_{i=1}^{k} \dim L_i$;

5) *существует вектор $a \in \sum_{i=1}^{k} L_i$, для которого разложение по подпространствам $L_1, \ldots, L_k$ единственно;*

6) *произвольная система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_k$, взятых по одному из каждого подпространства L_i, $i = \overline{1,k}$, линейно независима;*

7) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ *(для $k = 2$).*

Теорема 45.8. *Линейное пространство V является прямой суммой двух своих подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда:*

1) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$;
2) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Если пространство V является прямой суммой L_1 и L_2, то в разложении произвольного вектора $x \in V$ по этим подпространствам: $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, вектор x_1 называется *проекцией x на L_1 параллельно L_2*, а вектор x_2, соответственно, – *проекцией x на L_2 параллельно L_1*.

Пример 45.5. Даны многочлены

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = t^3 + 2t + 4, & & g_1(t) = t^3 + t^2 + 2t, \\ f_2(t) = 3t^3 + t^2 - 1, & \text{и} & g_2(t) = 2t^3 + t^2 + t + 3, \\ f_3(t) = 5t^3 + t^2 + 4t + 7 & & g_3(t) = t^3 + 2t^2 + 5t - 3. \end{array}$$

Показать, что подпространства $L_1 = \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3)$ и $L_2 = \mathcal{L}(g_1, g_2, g_3)$ в прямой сумме образуют все пространство M_3, и найти проекцию многочлена $p(t) = 6t^3 + 2t^2 + 6t + 7$ на L_1 параллельно L_2.

Решение. В силу изоморфизма линейных пространств M_3 и $\mathbb{R}^4$ решим ту же задачу для линейных подпространств L_1 и L_2, натянутых на арифметические векторы

$$\begin{array}{lll} a_1 = (1,0,2,4), & & b_1 = (1,1,2,0), \\ a_2 = (3,1,0,-1), & \text{и} & b_2 = (2,1,1,3), \\ a_3 = (5,1,4,7) & & b_3 = (1,2,5,-3) \end{array}$$

соответственно, и вектора $x = (6,2,6,7)$.

В силу теоремы 45.7 достаточно показать, что

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) = 4.$$

Имеем

$$L_1: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \dim L_1 = 2,$$

$$L_2: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \dim L_2 = 2.$$

Для нахождения $\dim(L_1 + L_2)$ воспользуемся алгоритмом, описанным в примере 45.3:

$$L_1 + L_2: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Тем самым, $\dim(L_1 + L_2) = 4$ и $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^4$.

Найдем теперь проекцию вектора $x = (6,2,6,7)$ на L_1 параллельно L_2. Для этого разложим вектор x по базису a_1, a_2, b_1, b_2 пространства $\mathbb{R}^4$:

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2. \tag{45.7}$$

Из этого разложения следует, что искомая проекция – это вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$.

Решим систему (45.7) методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&1&2&6\\0&1&1&1&2\\2&0&2&1&6\\4&-1&0&3&7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&1&2&6\\0&1&1&1&2\\0&-6&0&-3&-6\\0&-13&-4&-5&-17\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&1&2&6\\0&1&1&1&2\\0&0&6&3&6\\0&0&9&8&9\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&1&2&6\\0&1&1&1&2\\0&0&2&1&2\\0&0&0&25&0\end{array}\right]\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}\beta_2=0,\\ \beta_1=1,\\ \alpha_2=1,\\ \alpha_1=2.\end{array}$$

Таким образом, проекцией x на L_1 параллельно L_2 является вектор

$$2a_1+a_2=(5,1,4,7),$$

а следовательно, проекцией многочлена $p(t)$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, заданным в условии задачи, является многочлен $5t^3+t^2+4t+7$.

Замечание. Можно отказаться от вычисления $\dim(L_1+L_2)$, а сразу искать разложение вектора x по совокупности базисов a_1,a_2 и b_1,b_2 подпространств L_1 и L_2, решая систему (45.7). Эта система имеет решение при любой правой части (следовательно, $\mathbb{R}^4=L_1+L_2$), она имеет единственное решение (как крамеровская система), и следовательно, каждый вектор $x\in\mathbb{R}^4$ имеет единственное разложение по подпространствам L_1 и L_2, т.е. $\mathbb{R}^4=L_1\oplus L_2$. ▪

Пусть L – линейное подпространство пространства V. Подпространство L^δ называется *дополнительным подпространством* к L, если $L\oplus L^\delta=V$.

Теорема 45.9. *Для любого подпространства L линейного пространства V существует дополнительное подпространство.*

Пример 45.6. Найти какие-либо два различных дополнительных подпространства к подпространству $L_1=\mathcal{L}(f_1,f_2,f_3)$ из предыдущего примера.

Решение. Воспользуемся изоморфизмом линейных пространств M_3 и $\mathbb{R}^4$ и тем, что, как было показано в предыдущем примере, L_1 является линейной оболочкой своего базиса из векторов

$$a_1=(1,0,2,4),\ a_2-3a_1=(0,1,-6,-13).$$

Дополним эти два вектора до базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$, для чего допишем к матрице, составленной из компонент векторов a_1 и a_2-3a_1, строки так, чтобы в результате получилась невырожденная матрица. Это можно сделать, например, построив следующую верхнюю треугольную матрицу:

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&2&4\\0&1&-6&-13\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right].\qquad(45.8)$$

Отсюда следует, что векторы $b_1=(0,0,1,0)$ и $b_2=(0,0,0,1)$ обладают требуемым свойством, и подпространство $\mathcal{L}(b_1,b_2)$ – дополнительное к L_1.

Для построения другого дополнительного подпространства перейдем от матрицы (45.8) к новой невырожденной матрице, прибавив к ее третьей

строке первую:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Строки матрицы останутся линейно независимыми и, следовательно, будут базисом пространства $\mathbb{R}^4$. Таким образом, линейная оболочка $\mathcal{L}(b_3, b_4)$, натянутая на векторы $b_3 = (1,0,3,4)$, $b_4 = (0,0,0,1)$, образует, очевидно, другое дополнительное подпространство к L_1. ■

ЗАДАЧИ

Примеры и простейшие свойства линейного подпространства

45.1. Доказать, что в изоморфных пространствах образ и прообраз линейного подпространства L являются линейными подпространствами, изоморфными L.

Доказать, что следующие множества арифметических векторов из P^n образуют линейные подпространства; найти их базис и размерность.

45.2. Все векторы, у которых первая и последняя компоненты равны между собой.

45.3. Все векторы, у которых компоненты с четными номерами равны нулю.

45.4. Все векторы, у которых компоненты с четными номерами равны между собой.

45.5. Все векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$, где α, β произвольны.

45.6. Доказать, что все симметрические матрицы образуют линейное подпространство пространства матриц $P^{n\times n}$. Найти размерность и какой-либо базис этого подпространства.

45.7. Доказать, что все кососимметрические матрицы образуют линейное подпространство пространства матриц $P^{n\times n}$. Найти размерность и какой-либо базис этого подпространства в случае, если: а) P – поле характеристики, отличной от 2; б) P – поле характеристики 2.

45.8. Доказать, что все матрицы, перестановочные с данной матрицей $A \in P^{n\times n}$, образуют линейное подпространство пространства матриц $P^{n\times n}$. Найти размерность и какой-либо базис этого подпространства в случае, когда $P = \mathbb{C}$ и $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

45.9. Доказать, что если линейное подпространство L пространства многочленов M_n для любого $k = \overline{0,p}$ содержит хотя бы один многочлен степени k и не содержит многочленов степени $k > p$, то оно совпадает с подпространством M_p всех многочленов степени не выше p.

Доказать, что следующие множества многочленов из M_n образуют вещественные линейные подпространства, и найти их базис и размерность.

45.10. Все четные многочлены.

45.11. Все нечетные многочлены.

45.12. Все многочлены, имеющие корень $a \in \mathbb{R}$.

45.13. Все многочлены, имеющие корень $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

45.14. Все многочлены, имеющие своими корнями не равные между собой числа $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

45.15. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n неизвестных с коэффициентами из произвольного поля P называется *однородным многочленом*, если можно указать такое натуральное число m, что

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \forall t \in P.$$

Показать, что все однородные многочлены степени k от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из произвольного поля вместе с нулевым многочленом при обычных операциях над многочленами образуют линейное пространство, и найти его размерность.

45.16. Найти размерность и какой-либо базис комплексного арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} (1+i)x_1 + (1+3i)x_2 = 0, \\ (1-2i)x_1 + (1+2i)x_2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1-i)x_1 + (2+i)x_2 = 0, \\ (6-4i)x_1 + (9+7i)x_2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1-i)x_1 + (-3+2i)x_2 + (2-i)x_3 = 0, \\ (-4+6i)x_1 + (4-3i)x_2 - 3ix_3 = 0, \\ (-9+i)x_1 + (5-i)x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 + (2+i)x_3 = 0, \\ (1-3i)x_1 - (2+4i)x_2 + (5-5i)x_3 = 0, \\ 2ix_1 + (2+2i)x_2 + (-2+4i)x_3 = 0; \end{cases}$

д)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + (1+2i)x_3 - (1-i)x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - (1+3i)x_3 + (2-i)x_4 = 0, \\ ix_1 + (1+i)x_2 + x_3 + 2ix_4 = 0, \\ 2ix_1 + 2ix_3 - (2-2i)x_4 = 0, \\ (2-i)x_2 - (1+2i)x_3 + (2-i)x_4 = 0. \end{cases}$$

Линейная оболочка системы векторов

Найти размерность и какой-либо базис линейных оболочек, натянутых на следующие системы векторов соответствующих линейных пространств V.

45.17. $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$; $V = \mathbb{R}^4$.

45.18. $a_1 = (1,1,1,1,0)$, $a_2 = (-1,-1,1,1,1)$, $a_3 = (2,2,0,0,-1)$, $a_4 = (1,1,5,5,2)$, $a_5 = (1,-1,-1,0,0)$; $V = \mathbb{R}^5$.

45.19. $f_1(t) = t^6 + t^4$, $f_2(t) = t^6 + 3t^4 - t$, $f_3(t) = t^6 - 2t^4 + t$, $f_4(t) = t^6 - 4t^4 + 2t$; $V = M_6$.

45.20. $c_1 = (-3+2i, -i)$, $c_2 = (3+i, 7-6i)$; $V = \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

45.21. $c_1 = (1,-2,i)$, $c_2 = (2-i,-4+2i,1+2i)$, $c_3 = (3i,-6i,-3)$; $V = \mathbb{C}^3$.

45.22. $c_1 = (0,3+3i,4-i,-3)$, $c_2 = (1,1,1,1-i)$, $c_3 = (1,7+6i,9-2i,-5-i)$; $V = \mathbb{C}^4$.

45.23. $c_1 = (1,1,1,1)$, $c_2 = (1,1,1,1-i)$, $c_3 = (1,2,1,3)$, $c_4 = (0,0,0,1)$, $c_5 = (2,3,2,4-i)$; $V = \mathbb{C}^4$.

45.24. $A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$.

45.25. Линейное подпространство L натянуто на систему векторов $x_1, \ldots, x_k$. Доказать, что размерность L равна рангу системы $x_1, \ldots, x_k$, а базисом может служить любая база этой системы.

45.26. Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем P, состоящим из q элементов. Найти количество k-мерных подпространств пространства V.

Найти системы линейных алгебраических уравнений, которые описывают линейные оболочки, натянутые на следующие системы векторов.

45.27. $a_1 = (1,-1,1,0)$, $a_2 = (1,1,0,1)$, $a_3 = (2,0,1,1)$.

45.28. $a_1=(1,-1,1,-1,1)$, $a_2=(1,1,0,0,3)$, $a_3=(3,1,1,-1,7)$, $a_4=(0,2,-1,1,2)$.

45.29. $c_1=(1+i,3)$, $c_2=(3-i,3-6i)$.

45.30. $c_1=(1,1,1,1-i)$.

45.31. $c_1=(0,3+i,4-i,-3)$, $c_2=(1,7+2i,9-2i,-5-i)$, $c_3=(1,4+i,5-i,-2-i)$, $c_4=(1,1,1,1-i)$.

45.32. Пусть L – m-мерное линейное подпространство n-мерного пространства V. Доказать, что можно найти такой базис $e_1,\ldots,e_n$ пространства V, в котором первые m векторов $e_1,\ldots,e_m$ принадлежат подпространству L.

45.33. Доказать, что каково бы ни было m-мерное подпространство L n-мерного пространства V, где $m<n$, найдется базис V, в котором: а) не содержится ни одного вектора из L; б) содержится ровно k векторов из L, $k<m$.

45.34. Можно ли составить базис пространства M_5 из многочленов пятой степени? Можно ли, наоборот, найти базис этого пространства, в котором бы не содержалось ни одного многочлена пятой степени?

45.35. Доказать, что линейная оболочка системы векторов $x_1,\ldots,x_k$ является пересечением всех подпространств, содержащих векторы $x_1,\ldots,x_k$, и в этом смысле является наименьшим подпространством, содержащим эти векторы.

45.36. Пусть V – n-мерное линейное пространство. Если e – какой-либо базис пространства V, то для каждого вектора $a\in V$ обозначим через a'_e строку из его координат в базисе e. Доказать, что две линейно независимые системы $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $b_1,b_2,\ldots,b_k$ $(k\le n)$ пространства V эквивалентны тогда и только тогда, когда в любом базисе e соответствующие миноры k-го порядка матриц A_e и B_e, составленные из строк $(a_1)'_e$, $(a_2)'_e$, …, $(a_k)'_e$ и $(b_1)'_e$, $(b_2)'_e$, …, $(b_k)'_e$, пропорциональны.

Сумма и пересечение подпространств

45.37. Доказать, что для любого $p\in\mathbb{N}$

$$\dim(L_1+\ldots+L_p)\le\dim L_1+\ldots+\dim L_p.$$

45.38. Пусть L_1 – линейная оболочка векторов $a_1,\ldots,a_k$, L_2 – линейная оболочка векторов $b_1,\ldots,b_l$. Доказать, что базисом суммы L_1+L_2 может служить любая база системы $a_1,\ldots,a_k$, $b_1,\ldots,b_l$. В частности, базис L_1+L_2 можно получить дополне-

нием как базиса L_1, так и базиса L_2.

45.38.1. Доказать, что в изоморфных линейных пространствах образ суммы подпространств является суммой образов этих подпространств.

Найти размерность и какой-либо базис суммы подпространств $L_1 = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_l)$ для каждой из следующих систем векторов соответствующих линейных пространств.

45.39. $a_1 = (0,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,1,2)$, $a_3 = (-2,0,1,1)$;
$b_1 = (-1,3,2,-1)$, $b_2 = (1,1,0,-1)$.

45.40. $a_1 = (2,-5,3,4)$, $a_2 = (1,2,0,-7)$, $a_3 = (3,-6,2,5)$;
$b_1 = (2,0,-4,6)$, $b_2 = (1,1,1,1)$, $b_3 = (3,3,1,5)$.

45.41. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

45.42. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

45.42.1. Доказать, что в пространстве M_3 суммой подпространств
$L_1 = \{f(t) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$, $L_2 = \{f(t) \mid f(1) = f'(1), f(2) = 0\}$
является подпространство
$$L = \{f(t) \in M_3 \mid 2f'(0) + 5f(0) = 0\}.$$

45.43. Доказать, что сумма $L_1 + L_2$ двух линейных подпространств равна пересечению всех линейных подпространств, содержащих как L_1, так и L_2, и в этом смысле является наименьшим подпространством, содержащим L_1 и L_2.

45.44. Доказать, что для любого $p \in \mathbb{N}$
$$\dim(L_1 + \ldots + L_p) \geq \max(\dim L_1, \ldots, \dim L_p),$$
причем знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда одно из подпространств L_j содержит все остальные подпространства.

45.45. Пусть V – линейное пространство над бесконечным полем. Доказать, что объединение конечного множества подпространств в V является подпространством тогда и только тогда, когда одно из подпространств содержит все остальные.

45.45.1. Пусть V – линейное пространство над бесконечным полем P и $L_1, \ldots, L_k$ – его подпространства, ни одно из которых не совпадает с V. Доказать, что в V можно найти бесконечно много векторов, не лежащих ни в одном из этих подпространств.

45.46. Пусть V – линейное пространство над бесконечным полем P и $L_1, \ldots, L_k$ – его подпространства, причем $L_1 \cup \ldots \cup L_k = V$. Доказать, что $V = L_j$ для некоторого $j = 1, \ldots, k$.

45.47. Пусть V – линейное пространство над полем P, L_1 и L_2 – его подпространства, причем $L_1 \cup L_2 = V$. Доказать, что либо $V = L_1$, либо $V = L_2$.

45.48. Привести пример такого пространства V над конечным полем, что $V = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, где все L_1, L_2, L_3 являются подпространствами, отличными от V и от нулевого подпространства.

Найти размерность и какой-либо базис пересечения двух подпространств $L_1 = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_l)$ для каждой из следующих систем векторов.

45.49. $a_1 = (2, 1, 0)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $a_3 = (-5, -2, 1)$;
$b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-1, 3, 0)$, $b_3 = (2, 0, 3)$.

45.50. $a_1 = (1, 2, 1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 1, 0)$, $a_3 = (3, 1, 1, -2)$;
$b_1 = (0, 4, 1, 3)$, $b_2 = (1, 0, -2, -6)$, $b_3 = (1, 0, 3, 5)$.

45.51. $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$;
$b_1 = (1, 0, 1, 0)$, $b_2 = (0, 2, 1, 1)$, $b_3 = (1, 2, 1, 2)$.

Найти размерности и какие-либо базисы суммы и пересечения подпространств $L_1 = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_l)$, натянутых на следующие системы комплексных арифметических векторов; рассмотреть два случая: когда основным полем является поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел и когда – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

45.52. $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (1, -2, i)$, $a_3 = (2, 0, 3 + i)$;
$b_1 = (1, 0, 3i)$, $b_2 = (1, 4, 3 + 2i)$, $b_3 = (-1, 4, 3 - 4i)$.

45.53. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1, 3 - i)$, $a_3 = (2, 3, 2, 4 - i)$,
$a_4 = (1, 1, 1, 1 - i)$; $b_1 = (0, 1, 0, 3 - i)$, $b_2 = (0, 2, 0, 5 - 2i)$,
$b_3 = (0, 2 + i, 0, 6 + i)$, $b_4 = (1, 4 + i, 5 - i, -2 - i)$.

Найти размерность и какой-либо базис пересечения двух подпространств L_1 и L_2, если первое задано однородной системой уравнений, а второе – как линейная оболочка системы векторов a_1, a_2, a_3.

45.54. $\begin{cases} 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ $a_1 = (2, 3, -1)$, $a_2 = (1, 2, 2)$, $a_3 = (1, 1, -3)$.

45.55. $\{-5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0;$ $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, -1)$, $a_3 = (1, 3, 0, -4)$.

45.56. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$ $a_1 = (-1, 6, 4, 7, -2)$, $a_2 = (-2, 3, 0, 5, -2)$, $a_3 = (-3, 6, 5, 6, -5)$.

45.57. Найти размерности и какие-либо базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, если первое задано однородной системой уравнений, а второе – как линейная оболочка системы комплексных арифметических векторов a_1, a_2, a_3 (рассмотреть два случая: когда основным полем является поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел и когда – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел):

$\begin{cases} 3x_1 + (1 - 2i)x_2 + ix_3 = 0, \\ (3 + 6i)x_1 + 5x_2 - (2 - i)x_3 = 0; \end{cases}$ $a_1 = (1, -2, i)$, $a_2 = (2, 1 + i, -i)$, $a_3 = (0, 5 + i, -3i)$.

Найти какие-либо базисы суммы и пересечения двух подпространств L_1 и L_2, заданных однородными системами уравнений.

45.58. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

45.59. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

45.60. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 - x_4 = 0, \\ -3x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

45.61. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств пространства $\mathbb{R}^{3\times 3}$, натянутых на системы матриц

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 4 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

соответственно.

45.62. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств пространства M_3, натянутых на системы многочленов $1 + 2t + t^3$, $1 + t + t^2$, $t - t^2 + t^3$ и $1 + t^2$, $1 + 3t + t^3$, $3t - t^2 + t^3$ соответственно.

45.63. Доказать, что если размерность суммы двух подпространств на единицу больше размерности их пересечения, то сумма совпадает с одним из этих подпространств, а пересечение – с другим.

45.64. Доказать, что если сумма размерностей двух подпространств больше размерности всего пространства, то пересечение этих подпространств содержит ненулевой вектор.

45.65. Матрицы A_1 и A_2 имеют одинаковые размеры. Пространства V_1, V_2 порождены их строками, а пространства W_1, W_2 – их столбцами. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) $\operatorname{rg}(A_1 \mid A_2) = \operatorname{rg} A_1 + \operatorname{rg} A_2$, где $(A_1 \mid A_2)$ – матрица, полученная приписыванием к матрице A_1 матрицы A_2;

б) $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$;

в) $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$.

45.66. Доказать, что для подпространств L, L_1, L_2:

а) $(L \cap L_1) + (L \cap L_2) \subset L \cap (L_1 + L_2)$;

б) $L + (L_1 \cap L_2) \subset (L + L_1) \cap (L + L_2)$.

Привести примеры подпространств L, L_1, L_2, для которых включения в этих соотношениях являются строгими.

45.67. Доказать, что для подпространств L, L_1, L_2:

а) если $L_1 \subset L$, то $(L \cap L_1) + (L \cap L_2) = L \cap (L_1 + L_2)$;

б) если $L \subset L_1$, то $L + (L_1 \cap L_2) = (L + L_1) \cap (L + L_2)$.

Прямая сумма линейных подпространств

45.68. Для вектора $x = (1, 0, 1)$ найти два различных разложения по подпространствам L_1 и L_2, рассмотренным в задаче 45.49.

45.69. Пусть V – линейное пространство над бесконечным полем. Доказать, что если его вектор x имеет два различных

разложения по подпространствам $L_1, \ldots, L_k$, то он имеет бесконечно много таких разложений.

45.70. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^n$ арифметических векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть прямая сумма подпространства L_1, описываемого уравнением $x_1 + \ldots + x_n = 0$, и подпространства L_2, описываемого системой уравнений $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Найти проекции единичных векторов $e_1, \ldots, e_n$ естественного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

45.71. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$ есть прямая сумма подпространств L_1 – симметрических и L_2 – кососимметрических матриц. Найти проекции A_1 и A_2 матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

45.72. Показать, что линейные подпространства L_1 и L_2, натянутые на системы векторов $a_1 = (2, 3, 11, 5)$, $a_2 = (1, 1, 5, 2)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$ и $b_1 = (2, 1, 3, 2)$, $b_2 = (1, 1, 3, 4)$, $b_3 = (5, 2, 6, 2)$ соответственно, дают в прямой сумме все пространство $\mathbb{R}^4$, и найти разложение вектора $x = (2, 0, 0, 3)$ по этим подпространствам.

45.73. Доказать, что пространство M_n является прямой суммой подпространства всех четных и подпространства всех нечетных многочленов степени не выше n.

45.74. Доказать, что пространство M_3 является прямой суммой следующих подпространств L_1 и L_2, и найти проекцию многочлена $p(t) = t^3 + 1$ на L_1 параллельно L_2:

а) $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(1) = f'(1) = 0\}$,
$L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f'(0) = 0\}$;

б) $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f(1)\}$,
$L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(2t) = 2f(t) \forall t \in \mathbb{R}\}$;

в) $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(-1) = f(0) = f(1) = 0\}$,
$L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f'(1) = 0\}$.

45.75. В пространстве $\mathbb{C}^2$ подпространство L_1 натянуто на вектор $(i, 2)$, а подпространство L_2 – на вектор $(1 + i, 3)$. Найти проекцию вектора a на L_1 параллельно L_2, если:

а) $a = (-1, 2i)$; б) $a = (3 - i, 3 - 6i)$; в) $a = (10 + 15i, -15i)$.

45.76. Доказать, что для того, чтобы сумма более чем двух подпространств $L_1+L_2+\ldots+L_p$ была прямой, необходимо, чтобы выполнялось условие $L_i \cap L_j = \{\theta\}$ для всех $i \neq j$. Является ли это условие достаточным?

45.76.1. Доказать, что в изоморфных линейных пространствах образ прямой суммы подпространств является прямой суммой образов этих подпространств.

45.77. Для подпространства L, натянутого на векторы $a_1 = (1,3,0,-1)$, $a_2 = (2,5,1,2)$, $a_3 = (1,2,1,3)$, найти два различных дополнительных подпространства.

45.78. В пространстве M_n найти два различных дополнительных подпространства для подпространства L многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$.

45.79. В пространстве $\mathbb{R}^{3\times 3}$ найти два различных дополнительных подпространства для подпространства L кососимметрических матриц.

45.80. Пространство V разложено в прямую сумму подпространств $L_1, \ldots, L_p$. Доказать, что:

а) если вектор a имеет разложение $a = a_1 + \ldots + a_p$, $a_j \in L_j$, $j = \overline{1,p}$, то разложение вектора λa по подпространствам $L_1, \ldots, L_p$ имеет вид

$$\lambda a = \lambda a_1 + \ldots + \lambda a_p;$$

б) если вектор b имеет разложение $b = b_1+\ldots+b_p$, $b_j \in L_j$, $j = \overline{1,p}$, то разложение вектора $a+b$ по подпространствам $L_1, \ldots, L_p$ имеет вид

$$a + b = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_p + b_p).$$

45.80.1. Доказать, что в линейном пространстве над бесконечным полем любое нетривиальное подпространство имеет бесконечно много дополнительных подпространств.

45.81. Пусть P – поле из k элементов, U – подпространство размерности m в пространстве V размерности n над полем P. Найти число всех дополнительных к U подпространств.

45.82. Доказать, что в пространстве V над бесконечным полем подпространства $L_1, \ldots, L_p$ имеют общее дополнительное подпространство в том и только том случае, когда их размерности равны.

45.83. Известно, что функционал $d(L)$ на множестве всех подпространств линейного пространства V обладает следующи-

ми свойствами:

а) если подпространства L_1 и L_2 имеют нулевое пересечение, то

$$d(L_1 + L_2) = d(L_1) + d(L_2),$$

б) если $\dim L = 1$, то $d(L) = 1$.

Доказать, что $d(L) = \dim L$ для всех подпространств L.

§46. Линейное аффинное многообразие

Приведенные в §18 определение и элементарные свойства линейного многообразия (применительно к вещественным линейным пространствам) сохраняются и в линейном пространстве над произвольном полем. Воспроизведем известные факты и дополним их рядом новых.

Из определения линейного аффинного многообразия вытекают следующие факты.

1°. *Вектор сдвига x_0 принадлежит линейному многообразию.*

2°. *Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпространству.*

Теорема 46.1. *Два линейных аффинных многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2 = L$ и $x_1 - x_2 \in L$.*

Следствие 1. *Вектором сдвига может быть любой вектор линейного многообразия.*

Следствие 2. *Линейное многообразие может быть получено сдвигом единственного направляющего подпространства.*

Размерностью линейного аффинного многообразия называется размерность его направляющего подпространства. Линейное многообразие размерности 1 называется *прямой в линейном пространстве*, размерности 2 – *плоскостью*, размерности $(n-1)$, где $n = \dim V$, – *гиперплоскостью*.

Очевидно, что прямая в линейном пространстве определяется уравнением

$$x = x_0 + ta,\ t \in P,$$

где x_0 – вектор сдвига и a – базис направляющего подпространства, а плоскость – уравнением

$$x = x_0 + up_1 + vp_2,\ u, v \in P,$$

где x_0 – вектор сдвига и p_1, p_2 – базис направляющего подпространства.

Теорема 46.2. *Множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений с n неизвестными и с коэффициентами из произвольного поля P является линейным аффинным многообразием в арифметическом пространстве P^n, полученным сдвигом подпространства решений приведенной однородной системы на частное решение неоднородной системы.*

Отметим, что вытекающее отсюда утверждение о размерности линейного многообразия решений неоднородной системы остается в силе и для случая произвольного поля.

Пример 46.1. Линейное многообразие H арифметических векторов

пространства $\mathbb{Z}_2^5$ описывается системой

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 = 1, \\ x_1 \quad\quad + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ \quad\quad x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad = 1, \\ x_1 + x_2 \quad\quad\quad + x_5 = 0. \end{cases}$$

Найти его размерность и показать, что общее количество векторов в H конечно.

Решение. Применим метод Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Вектор сдвига многообразия H – это частное решение последней системы: например, вектор $a = (0, 0, 1, 0, 0)$, а направляющее подпространство L – это множество решений однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \tag{46.1}$$

Ее фундаментальную систему образуют векторы

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	0	1	0
1	0	0	0	1

Таким образом, общее решение системы (46.1) задается соотношением

$$x = c_1(1, 1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, 0, 0, 1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_2.$$

Отсюда следует, что $\dim L = 2$ и, так как каждый коэффициент c_i в этом соотношении принимает только два значения, то L содержит 4 вектора.

Тем самым, $\dim H = 2$ и общее количество векторов в многообразии $H = a + L$ конечно и равно 4. ▪

Пример 46.2. Доказать, что множество

$$H = \{f(t) \in M_4 \mid f(1) = 1, f'(0) + 2f(0) = 2\}$$

образует линейное многообразие в пространстве M_4. Найти его размерность.

Решение. Опишем множество H системой линейных соотношений, которым удовлетворяют коэффициенты многочлена $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \in H$:

$$\begin{array}{rcl} f(1) = 1 & \iff & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \\ f'(0) + 2f(0) = 2 & \iff & 2a_0 + a_1 = 2. \end{array}$$

Решим аналогичную задачу для арифметических векторов $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ из пространства $\mathbb{R}^5$, изоморфного пространству M_4.

Множество решений неоднородной системы

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \\ 2a_0 + a_1 = 2 \end{cases} \tag{46.2}$$

образует линейное многообразие с направляющим подпространством, описываемым соответствующей (46.2) приведенной однородной системой, и вектором сдвига, являющимся частным решением системы (46.2). Таким образом, направляющее подпространство – это множество решений системы

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \\ 2a_0 + a_1 = 0, \end{cases}$$

размерность которого равна $5 - 2 = 3$, а вектор сдвига – это, например, вектор

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.$$

Это означает, что исходное множество H образует линейное аффинное многообразие с вектором сдвига $f_0(t) = 1$ и $\dim H = 3$. ▪

Пример 46.3. Описать линейное многообразие $H = a + L$ системой уравнений, если $a = (2, 0, 0, 1, 1)$, а направляющее подпространство L натянуто на векторы $a_1 = (1, 1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (0, 2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (2, 4, 1, 5, 2)$.

Решение. Вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежит линейному многообразию $H = a + L$ тогда и только тогда, когда вектор $x - a$ принадлежит линейной оболочке $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$. Как было показано в примере 45.2, это равносильно совместности следующей системы относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \quad + 2\alpha_3 = x_1 - 2, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = x_2, \\ \quad \alpha_2 + \ \alpha_3 = x_3, \\ 2\alpha_1 + \ \alpha_2 + 5\alpha_3 = x_4 - 1, \\ \alpha_1 \quad - 2\alpha_3 = x_5 - 1. \end{cases} \tag{46.3}$$

Совместность этой системы исследуем методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 - 2 \\ 1 & 2 & 4 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 2 & 1 & 5 & x_4 - 1 \\ 1 & 0 & 2 & x_5 - 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 - 2 \\ 0 & 2 & 2 & x_2 - x_1 + 2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 - 2x_1 + 3 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_1 + 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 - 2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_3 + x_2 - x_1 + 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_4 + x_2 + 3x_1 - 4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_1 + 1 \end{array}\right].$$

Таким образом, для совместности системы (46.3), и следовательно, для того, чтобы вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежал линейному многообразию H необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_5 = 1. \end{cases}$$ ▪

Пример 46.4. Описать линейное многообразие $H = a + L$ системой уравнений, если $a = (1, 1, 1, 1, 1)$, а направляющее подпространство L задано однородной системой

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \quad = 0, \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 + \ x_5 = 0, \\ -x_1 \quad + x_3 \quad + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из теории систем линейных алгебраических уравнений следует, что данная однородная система является приведенной для искомой системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = b_1, \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = b_2, \\ -x_1 + x_3 + 2x_5 = b_3. \end{cases}$$

Константы b_1, b_2, b_3 в правых частях надо подобрать так, чтобы вектор сдвига $a = (1, 1, 1, 1, 1)$ был одним из решений системы. Тривиальной подстановкой получим: $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 2$. ▪

Линейные аффинные многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ в линейном пространстве V называются *параллельными*, если либо $L_1 \subset L_2$, либо $L_2 \subset L_1$.

Теорема 46.3. *Если два линейных аффинных многообразия с непустым пересечением параллельны, то одно из них содержит другое.*

Следствие. Если линейные многообразия параллельны, то либо они не пересекаются, либо одно из них содержится в другом.

Теорема 46.4. *Непустое пересечение линейных аффинных многообразий $H_i = x_i + L_i$, $i = \overline{1,k}$, является линейным многообразием с направляющим подпространством $\bigcap_{i=1}^{k} L_i$.*

Теорема 46.5. *Всякое k-мерное линейное аффинное многообразие в n-мерном пространстве можно задать в виде пересечения $n - k$ гиперплоскостей.*

Теорема 46.6. *Пересечение линейного аффинного многообразия $H = x_0 + L$ с любым подпространством, дополнительным к L, состоит ровно из одного вектора.*

ЗАДАЧИ

46.1. Что представляет собой линейное многообразие размерности 0?

46.2. Что представляет собой линейное многообразие размерности n в n-мерном пространстве V?

46.3. Доказать, что линейное многообразие $H = a + L$ является подпространством тогда и только тогда, когда его вектор сдвига a принадлежит направляющему подпространству.

46.4. Доказать, что для того, чтобы линейное многообразие $H = a + L$ было подпространством, необходимо, чтобы сумма любых двух его векторов принадлежала направляющему подпространству L.

46.5. Пусть V – линейное пространство над полем P характеристики, большей двух. Доказать, что для того, чтобы линейное многообразие $H = a + L$ в V было подпространством, достаточно, чтобы сумма каких-либо двух его векторов принадлежала направляющему подпространству L. Верен ли этот результат, если

характеристика поля P равна двум?

46.6. Пусть линейное многообразие $H = a + L$ не является подпространством. Может ли объединение линейного многообразия H и его направляющего подпространства L являться подпространством?

Найти вектор сдвига и направляющее подпространство для линейного многообразия в $\mathbb{R}^4$, описанного системой.

46.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$ **46.8.** $\begin{cases} x_1 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

Найти вектор сдвига и направляющее подпространство для линейного многообразия в пространстве комплексных арифметических векторов, если это многообразие описано неоднородной системой; рассмотреть два случая: когда основное поле – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и когда – поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

46.9. $\begin{cases} (1-i)x_1 + (1+i)x_2 - x_3 = i, \\ 2x_1 + 2ix_2 - (1+i)x_3 = -1 + i, \\ (3-i)x_1 + (1+3i)x_2 - (2+i)x_3 = -1 + 2i. \end{cases}$

46.10. $\begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 + x_4 = 2 - i, \\ ix_1 + ix_2 - x_3 = -2 + i, \\ x_1 - x_2 - ix_3 - x_4 = -2 + i. \end{cases}$

Найти вектор сдвига и направляющее подпространство линейного многообразия, описанного следующими системами, в зависимости от значения λ (считать, что основное поле – $\mathbb{C}$).

46.11. $\begin{cases} \lambda x_1 + ix_2 - 2x_3 = -2\lambda, \\ -x_1 - ix_2 + 2\lambda x_3 = 2\lambda. \end{cases}$

46.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda - i, \\ -x_1 + x_2 - 8x_3 + \lambda x_4 = 3i - 2. \end{cases}$

46.13. Доказать, что в изоморфных линейных пространствах образ (прообраз) линейного многообразия $H = x_0 + L$ является линейным многообразием, вектором сдвига которого служит образ (прообраз) вектора x_0, а направляющим подпространством – образ (прообраз) подпространства L.

46.14. Доказать, что в пространстве многочленов M_n следующие множества многочленов $f(t)$ являются линейными много-

образиями, и найти их размерности:

а) $f(t_1) = c$, где $t_1, c \in \mathbb{R}$ произвольны;

б) $f'(t_1) = c$, где $t_1, c \in \mathbb{R}$ произвольны;

в) $\alpha_0 f(t_1) + \alpha_1 f'(t_1) = c$, где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$ и $t_1, c \in \mathbb{R}$ произвольны;

г) $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i f^{(i)}(t_1) = c$, где $k < n$ и $\alpha_0^2 + \ldots + \alpha_k^2 \neq 0$, $t_1, c \in \mathbb{R}$ произвольны;

д) $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(t_i) = c$, где $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 \neq 0$, $c, t_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$ произвольны;

е) $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \int\limits_{a_i}^{b_i} f(t)\,dt = c$, где $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 \neq 0$ и $c, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$ таковы, что $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_k < b_k$.

46.15. Доказать, что в пространстве квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ следующие множества матриц X являются линейными многообразиями, и найти их размерности:

а) $\operatorname{tr} X = c$, где $c \in \mathbb{R}$;

б) $AX = B$, где матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ таковы, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}[A \mid B]$;

в) $XA = B$, где матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ таковы, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}[A^T \mid B^T]$;

г) $AXB = C$, где матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ таковы, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}[A \mid C]$ и $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg}[B^T \mid C^T]$;

д) $[X, A] = B$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$;

е) $[X, A] = B$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

46.16. Доказать, что в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$

а) все матрицы, у которых каждая строчная сумма равна единице;

б) все матрицы, у которых каждая строчная и каждая столбцовая суммы равны единице,

образуют линейные многообразия, и найти их размерности.

Построить системы линейных уравнений, описывающие линейные многообразия $H = a + L$ со следующими векторами сдвига a и направляющими подпространствами L, натянутыми на

указанные векторы e_1, e_2, e_3.

46.17. $e_1 = (0,1,3,-4)$, $e_2 = (2,-1,0,2)$, $e_3 = (2,1,6,-6)$, $a = (1,-2,-1,0)$

46.18. $e_1 = (1,-1,2,1)$, $e_2 = (0,-1,1,1+i)$, $e_3 = (-3,1,-2,i)$, $a = (1,0,1,0)$

46.19. $e_1 = (1,1,2,2)$, $e_2 = (0,3,1,-1)$, $e_3 = (2,0,1,0)$, $a = (1,2,1,-1)$

46.20. $e_1 = (1,i,2,1)$, $e_2 = (i,0,1,2i)$, $e_3 = (2i,-1,1+2i,3i)$, $a = (1,3i,7,-1)$

Построить системы линейных уравнений, описывающие линейные многообразия $H = a + L$ со следующими векторами сдвига a и направляющими подпространствами L, заданными однородными системами.

46.21. $a = (1,0,-2,-1)$, $L: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

46.22. $a = (1,-2,-2)$, $L: \begin{cases} x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 = 0, \\ 2ix_1 - x_2 + ix_3 = 0, \\ 3ix_1 - 2x_2 + (1+2i)x_3 = 0. \end{cases}$

46.23. Что можно сказать о матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, если известно, что для любого $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ система $Ax = b$ описывает линейное многообразие: а) размерности 1; б) размерности 2?

46.24. Доказать, что в линейном многообразии размерности k, не являющемся подпространством, можно найти линейно независимую систему, состоящую из $k+1$ векторов.

46.25. Доказать, что в линейном многообразии размерности k всякая система, состоящая из $k+2$ векторов, линейно зависима.

46.26. Доказать, что для любых $k+1$ линейно независимых векторов существует, причем единственное, линейное многообразие размерности k, содержащее эти векторы.

46.27. Доказать, что линейное многообразие размерности k, содержащее линейно независимые векторы x_0, $x_1, \ldots, x_k$, может быть описано как множество всех линейных комбинаций $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, коэффициенты которых удовлетворяют условию $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.

46.28. Описать все линейные многообразия n-мерного линейного пространства V, содержащие линейно независимые векторы

$x_0, x_1, \ldots, x_k$, где $k \leq n-1$.

46.29. Пусть V – n-мерное пространство над полем P, состоящим из q элементов. Найти число k-мерных линейных многообразий пространства V.

46.30. Пусть H – произвольное линейное многообразие в линейном пространстве V. Доказать, что бинарное отношение, определенное правилом:

$$x \sim y \iff x \in H, y \in H$$

является отношением эквивалентности на множестве всех векторов пространства V.

46.31. *Суммой $H_1 + H_2$ линейных многообразий $H_1 = a_1 + L_1$ и $H_2 = a_2 + L_2$* называется множество всех векторов вида $z_1 + z_2$, где $z_1 \in H_1$, $z_2 \in H_2$. Доказать, что сумма линейных многообразий H_1 и H_2 также является многообразием. Найти его направляющее подпространство.

46.32. *Произведением λH линейного многообразия $H = a + L$ на число* называется множество всех векторов вида λz, где $z \in H$. Доказать, что произведение многообразия H на число тоже является многообразием. Найти его направляющее подпространство.

46.33. В линейном пространстве V фиксировано подпространство L. Будет ли множество M всех линейных многообразий пространства V, полученных сдвигом подпространства L, линейным пространством относительно операций сложения и умножения на число, определенных в предыдущих двух задачах?

46.34. Показать, что если умножение многообразия $H = a + L$ на число λ ввести по правилу $\lambda H = \lambda a + L$, то множество M из предыдущей задачи будет линейным пространством. (Полученное пространство M называется *фактор-пространством пространства V по подпространству L*.

46.35. Пусть в условиях предыдущей задачи L – k-мерное подпространство n-мерного пространства V. Какова в таком случае размерность фактор-пространства M?

46.36. В пространстве $\mathbb{R}^5$ дана плоскость $x = x_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2$, где $x_0 = (2, 3, -1, 1, 1)$, $a_1 = (3, -1, 1, -1, 1,)$, $a_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$. Установить, принадлежат ли ей векторы $u = (1, 6, 4, 4, -2)$ и $v = (1, 6, 5, 4, -2)$.

46.37. Доказать, что если прямая имеет два общих вектора с линейным многообразием, то она содержится в этом многообразии.

46.38. Определить взаимное расположение многообразия $H = a + L$, где $a = (1,0,0,1)$, а L натянуто на векторы $y_1 = (5,2,-3,1)$, $y_2 = (4,1,-1,0)$, $y_3 = (-1,2,-5,3)$, и прямой $x = x_0 + tq$, если:

а) $x_0 = (3,1,-4,1)$, $q = (-1,1,2,1)$;

б) $x_0 = (3,0,-4,1)$, $q = (-1,1,2,1)$;

в) $x_0 = (-2,0,-1,2)$, $q = (1,1,-2,1)$.

46.39. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$ линейного пространства V размерности $n > 1$ лежали в одной плоскости.

46.40. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$ линейного пространства V имели один общий вектор, но не совпадали.

Доказать, что прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$ пересекаются, и найти их пересечение. Указать плоскость, в которой лежат эти прямые.

46.41. $x_1 = (9,3,6,15,-3)$, $q_1 = (7,-4,11,13,-5)$,
$x_2 = (-7,2,-6,-5,3)$, $q_2 = (2,9,-10,-6,4)$.

46.42. $x_1 = (2,1,1,3,-3)$, $q_1 = (2,3,1,1,-1)$,
$x_2 = (1,1,2,1,2)$, $q_2 = (1,2,1,0,1)$.

46.43. $x_1 = (3,1,2,1,3)$, $q_1 = (1,0,1,1,2)$,
$x_2 = (2,2,-1,-1,-2)$, $q_2 = (2,1,0,1,1)$.

46.44. Выяснить, при каком значении параметра λ прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$, где $x_1 = (1,1,1,1)$, $q_1 = (2,3,0,0)$, $x_2 = (1,1,1,\lambda)$, $q_2 = (3,2,0,0)$, принадлежат линейному многообразию наименьшей размерности.

46.45. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы существовала единственная прямая, пересекающая две данные прямые $x = x_1 + tq_1$, $x = x_2 + tq_2$ и содержащая заданный вектор c.

Найти прямую, содержащую вектор c и пересекающую прямые $x = x_1 + tq_1$, $x = x_2 + tq_2$. Найти пересечения искомой прямой с обеими заданными прямыми.

46.46. $c = (8,9,-11,-15)$, $x_1 = (1,0,-2,1)$, $q_1 = (1,2,-1,-5)$,
$x_2 = (0,1,1,-1)$, $q_2 = (2,3,-2,-4)$.

46.47. $c = (4,5,2,7)$, $x_1 = (1,1,1,1)$, $q_1 = (1,2,1,0)$,
$x_2 = (2,2,3,1)$, $q_2 = (1,0,1,3)$.

46.48. Доказать, что любые две прямые линейного пространства V размерности $n \geq 3$ содержатся в некотором трехмерном линейном многообразии пространства V.

46.49. Доказать, что прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$, где $x_1 = (8, 2, 5, 15, -3)$, $q_1 = (7, -4, 11, 13, -5)$, $x_2 = (-7, 2, -6, -5, 3)$, $q_2 = (2, 9, -10, -6, 4)$, не пересекаются. Построить линейное многообразие размерности 3, содержащее эти прямые.

46.50. Доказать, что любые две плоскости линейного пространства V, $\dim V = n \geq 3$, содержатся в некотором линейном многообразии размерности не выше 5.

Определить взаимное расположение плоскостей $x_0 + t_1p_1 + t_2p_2$ и $y_0 + t_1q_1 + t_2q_2$.

46.51.

$x_0 = (3, 1, 2, 0, 1)$, $p_1 = (2, -6, 3, 1, -6)$, $p_2 = (0, 5, -2, -1, 6)$,
$y_0 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $q_1 = (-1, 1, -1, 0, 1)$, $q_2 = (-1, 3, -1, -1, 2)$.

46.52.

$x_0 = (7, -4, 0, 3, 2)$, $p_1 = (-1, 1, 1, 1, 1)$, $p_2 = (1, -1, 1, 1, 1)$,
$y_0 = (6, -5, -1, 2, 3)$, $q_1 = (1, 1, -1, 1, 1)$, $q_2 = (1, 1, 1, -1, 1)$.

46.53.

$x_0 = (2, -3, 1, 5, 0)$, $p_1 = (3, -2, 1, 0, 1)$, $p_2 = (-1, 5, -2, 0, 3)$,
$y_0 = (0, -1, 0, 4, 1)$, $q_1 = (1, 2, 4, 0, -2)$, $q_2 = (6, 3, 4, 0, 3)$.

46.54.

$x_0 = (-3, -2, 1, -1, 2)$, $p_1 = (1, -1, 1, 1, 3)$, $p_2 = (-1, 2, 1, 2, -2)$,
$y_0 = (-1, 0, 3, 3, 8)$, $q_1 = (1, 1, -3, -3, 1)$, $q_2 = (0, 1, 2, 3, 1)$.

46.55. Описать все случаи взаимного расположения двух плоскостей $x = x_0 + t_1p_1 + t_2p_2$ и $x = y_0 + t_1q_1 + t_2q_2$ в n-мерном пространстве и указать необходимые и достаточные условия для каждого из этих случаев.

46.56. Доказать, что два линейных многообразия пространства V размерностей k и l соответственно содержатся в некотором линейном многообразии размерности не выше $k + l + 1$.

46.57. Пусть H_1 и H_2 – два линейных многообразия размерностей k_1 и k_2 n-мерного пространства V имеют общий вектор, причем $k_1 + k_2 > n$. Доказать, что их пересечение есть линейное многообразие размерности не меньше $k_1 + k_2 - n$. Сформулировать утверждения, которые вытекают отсюда для трехмерного и четырехмерного пространств.

46.58. Найти уравнение линейного многообразия минимальной размерности, содержащего векторы $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (2,4,1,3)$, $a_3 = (4,8,0,3)$, $a_4 = (3,5,0,1)$, и найти пересечение этого многообразия с прямой $x = x_0 + qt$, если:

а) $x_0 = (0,0,1,3)$, $q = (0,0,1,0)$;

б) $x_0 = (0,0,1,3)$, $q = (1,3,0,2)$.

46.59. Доказать, что в линейном пространстве V над полем характеристики 2 объединение любого линейного многообразия $H = a + L$ и его направляющего подпространства L является линейным подпространством.

46.60. Доказать, что два линейных многообразия $H_1 = a_1 + L_1$ и $H_2 = a_2 + L_2$ пересекаются тогда и только тогда, когда $a_1 - a_2 \in L_1 + L_2$.

46.61. Пусть $H_1 = a_1 + L_1$ и $H_2 = a_2 + L_2$ – два непересекающихся линейных многообразия. Доказать, что минимальная размерность линейного многообразия, содержащего H_1 и параллельного H_2, равна

$$\dim H_1 + \dim H_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

46.62. Пусть $H_1 = a_1 + L_1$ и $H_2 = a_2 + L_2$ – две непересекающиеся прямые в линейном пространстве V над полем P и пусть λ – фиксированный элемент из P, отличный от нуля и единицы. Выяснить, что представляет собой множество всех векторов вида $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, где x_1 и x_2 пробегают соответственно H_1 и H_2.

46.63. Пусть V – линейное пространство над полем P характеристики, не равной двум. Доказать, что H является линейным многообразием в пространстве V тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя различными векторами $a, b \in H$ в H содержится прямая, содержащая a и b. Верно ли это утверждение, если характеристика поля P равна двум?

46.64. Доказать, что если прямая $x = x_0 + tq$ и гиперплоскость $a + L$ не пересекаются, то $q \in L$.

46.65. Доказать, что если гиперплоскости $a_1 + L_1$ и $a_2 + L_2$ не пересекаются, то $L_1 = L_2$.

46.66. Доказать, что если пересечение гиперплоскостей H_1, ..., H_k n-мерного пространства непусто, то оно является линейным многообразием, размерность которого не меньше $n - k$.

46.67. Доказать, что всякое линейное многообразие размерности k в n-мерном пространстве можно задать как пересечение

$n-k$ гиперплоскостей.

46.68. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_k$ – любые вектора линейного пространства V над полем P. Доказать, что все векторы вида

$$x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k,$$

где числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in P$ удовлетворяют условию $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$, образуют линейное многообразие H, размерности, равной рангу системы векторов $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$.

Показать, что H есть многообразие наименьшей размерности, содержащее все векторы $a_0, a_1, \ldots, a_k$.

Глава XIII. Евклидовы и унитарные пространства

§47. Скалярное произведение. Матрица Грама

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пространство (т.е. $P = \mathbf{C}$ или $P = \mathbf{R}$). Отображение

$$(\cdot,\cdot): \quad V \times V \to P$$

называется *скалярным произведением*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам: для любых $x, y, z \in V$ и любого $\alpha \in P$

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$;
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$;
3) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$;
4) $(x,x) \geq 0$ для любого $x \in V$,
   $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

Число (x,y) называется *скалярным произведением векторов x и y*, аксиомы 1–4 называются *аксиомами скалярного произведения*.

Замечание. В вещественном случае черта комплексного сопряжения в первой аксиоме может быть опущена.

Вещественное линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством*, а комплексное – *унитарным*. Обозначение: E и U соответственно.

Пример 47.1. Скалярное произведение геометрических векторов, введенное в §24 на основании метрики, имеющейся на прямой, на плоскости и в пространстве, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения (теорема 24.2) и превращает пространства V_n, $n = 1, 2, 3$, в евклидовы пространства. Аксиоматическое определение скалярного произведения говорит о том, что это не единственный способ введения скалярного произведения.

Пример 47.2. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ может быть введено по правилу

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{47.1}$$

или, что то же самое,

$$(x,y) = X^T Y, \tag{47.2}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Такой способ введения скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ будем называть стандартным.

Пример 47.3. В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ может быть введено по правилу

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \tag{47.3}$$

или, что то же самое,

$$(x, y) = X^T \overline{Y}, \tag{47.4}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\overline{Y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n})^T$. Такой способ введения скалярного произведения в $\mathbb{C}^n$ будем называть стандартным.

Пример 47.4. В вещественном арифметическом пространстве $\mathbf{C}^n_{\mathbb{R}}$ скалярное произведение векторов $x = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$ и $y = (\alpha'_1 + i\beta'_1, \ldots, \alpha'_n + i\beta'_n)$ может быть введено по правилу

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \alpha'_i + \beta_i \beta'_i). \tag{47.5}$$

Пример 47.5. В пространстве матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) скалярное произведение матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ может быть введено по правилу

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}, \tag{47.6}$$

или, что то же самое,

$$(A, B) = \operatorname{tr}(B^T A),$$

если $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, и

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ij}}, \tag{47.7}$$

или, что то же самое,

$$(A, B) = \operatorname{tr}(B^H A),$$

если $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Эти способы введения скалярного произведения в пространствах $\mathbb{R}^{m\times n}$ и $\mathbb{C}^{m\times n}$ будем называть стандартными.

Пример 47.6. В пространстве многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами скалярное произведение многочленов $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ и $q(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i$ может быть введено одним из следующих правил:

$$(p, q) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i \tag{47.8}$$

или

$$(p, q) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) q(t)\, dt, \tag{47.9}$$

где $t_1 < t_2$ – произвольные фиксированные числа. Скалярное произведение, введенное в M_n по правилу (47.8), будем называть стандартным.

Пример 47.7. В комплексном линейном пространстве многочленов степени не выше n скалярное произведение многочленов может быть введено по правилу

$$(p, q) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{b_i}. \tag{47.10}$$

Скалярное произведение, введенное в комплексном пространстве M_n по этому правилу, будем называть стандартным.

Пример 47.8. В функциональном пространстве $C[0,1]$ скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ может быть задано равенством:

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx\,.$$

Теорема 47.1. *Скалярное произведение обладает следующими свойствами:*

1) $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$, $\forall x,y,z\in E$ *(U);*

2) $(x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y)$, $\forall x,y\in E$ *(U),* $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ *(соответственно* $\mathbb{C}$*);*

3) $(\theta,x)=(x,\theta)=0$, $\forall x\in E$ *(U);*

4) $(x,y)=0$ *для любого вектора* $y\in E$ *(U) тогда и только тогда, когда* $x=\theta$*;*

5) любое подпространство L *евклидова (унитарного) пространства является евклидовым (соответственно унитарным) пространством.*

Теорема 47.2. *Для любых векторов* $x,y\in E$ *(U) имеет место неравенство*

$$|(x,y)|^2\le(x,x)(y,y)$$

или, в другой форме,

$$\begin{vmatrix}(x,x) & (x,y)\\ (y,x) & (y,y)\end{vmatrix}\ge 0\,.$$

Это неравенство называется *неравенством Коши–Буняковского (Коши–Буняковского–Шварца).*

Теорема 47.3. *Неравенство Коши–Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы* x *и* y *коллинеарны.*

Длиной вектора x в евклидовом и унитарном пространстве называется число

$$|x|=\sqrt{(x,x)}.$$

Вектор x называется *нормированным*, если его длина равна единице: $|x|=1$.

Из аксиом скалярного произведения следует, что

1) любой вектор x евклидова (и унитарного) пространства имеет длину, при этом $|x|\ge 0$, $\forall x\in E\ (U)$ и $|x|=0\Leftrightarrow x=\theta$;

2) $|\alpha x|=|\alpha||x|$, $\forall x\in E\ (U)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$).

С помощью длин векторов неравенство Коши–Буняковского может быть переписано в виде

$$|(x,y)|\le|x|\cdot|y|.$$

Теорема 47.4. *В евклидовом (унитарном) пространстве для любых векторов* x,y *имеют место неравенства*

$$||x|-|y||\le|x+y|\le|x|+|y|\,. \tag{47.11}$$

Неравенства (47.11) называются *неравенствами треугольника в евклидовом (унитарном) пространстве.*

Матрицей Грама системы векторов $a_1,\dots,a_k$ евклидова (унитарного)

пространства называется матрица

$$G(a_1,\dots,a_k)=\begin{bmatrix}(a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_k)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \dots & (a_k,a_k)\end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы Грама называется *определителем Грама.*

Теорема 47.5. *Система векторов $a_1,\dots,a_k$ евклидова (унитарного) пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда*

$$\det G(a_1,\dots,a_k)=0.$$

Теорема 47.6. *Матрица Грама системы векторов евклидова (унитарного) пространства эрмитова.*

Теорема 47.7. *Определитель Грама линейно независимой системы векторов в евклидовом (унитарном) пространстве положителен.*

Если $G(e_1,e_2,\dots,e_n)=(g_{ij})$ – матрица Грама базиса e пространства V, то скалярное произведение векторов $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ и $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$ связано с их координатами соотношением

$$(x,y)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}x_iy_j=x_e^TGy_e, \tag{47.12}$$

если V – евклидово пространство, и

$$(x,y)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}x_i\overline{y_j}=x_e^TG\overline{y_e}, \tag{47.13}$$

если V – унитарное пространство.

Евклидовы пространства E_1 и E_2 называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi: E_1\to E_2$, которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение, т.е. если:

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\forall x,y\in E_1$;

2) $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$, $\forall x\in E_1$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$;

3) $(\varphi(x),\varphi(y))=(x,y)$, $\forall x,y\in E_1$.

Само отображение φ при этом называется *изоморфизмом евклидовых пространств* или *изометрией.*

Точно так же определяется изоморфизм унитарных пространств U_1 и U_2 (с очевидным отличием в свойстве 2: $\alpha\in\mathbb{C}$). Из определения следует, что изоморфные евклидовы (унитарные) пространства изоморфны как линейные пространства.

Теорема 47.8. *Два евклидовых (унитарных) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда равны их размерности.*

ЗАДАЧИ

Примеры скалярных произведений

47.1. Доказать, что в евклидовом (и в унитарном) пространстве для любого вектора x выполнено соотношение

$$(\theta,x)=0.$$

47.2. Доказать, что в любом конечномерном вещественном или комплексном линейном пространстве можно определить скалярное произведение.

47.3. Пусть V – евклидово пространство со скалярным произведением (x, y). Показать, что если положить

$$\langle x, y\rangle = \lambda(x, y),$$

где λ – фиксированное положительное число, то для $\langle x, y\rangle$ также выполнены все аксиомы скалярного произведения. Какой геометрический смысл имеет переход от (x, y) к $\langle x, y\rangle$ в пространстве V_3 геометрических векторов?

47.4. Доказать, что если $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$ – два различных скалярных произведения в одном и том же линейном пространстве V, то скалярным произведением в V будет и каждое из следующих правил:

а) $(x, y) = (x, y)_1 + (x, y)_2$;

б) $(x, y) = \lambda(x, y)_1 + \mu(x, y)_2$, где λ и μ – произвольные положительные числа.

47.5. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов x и y в некотором базисе двумерного вещественного линейного пространства V. Определить, можно ли скалярное произведение в V определить формулой:

а) $(x, y) = x_2 y_1$; б) $(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$;

в) $(x, y) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$;

г) $(x, y) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$; д) $(x, y) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$;

е) $(x, y) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$; ж) $(x, y) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

47.6. Доказать, что в двумерном вещественном линейном пространстве V равенство

$$(x, y) = x_e^T A\, y_e, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

где x_e и y_e – координатные столбцы векторов x и y в некотором базисе e, задает скалярное произведение в V тогда и только тогда, когда

$$A^T = A, \quad a_{11} > 0, \quad \det A > 0.$$

47.7. Доказать, что в n-мерном вещественном линейном про-

странстве V равенство

$$(x,y) = x_e^T A\, y_e, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

где x_e и y_e – координатные столбцы векторов x и y в некотором базисе e, задает скалярное произведение в V, если

$$A^T = A, \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ \forall i = \overline{1,n}.$$

47.8. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов x и y в некотором базисе двумерного комплексного линейного пространства V. Определить, можно ли скалярное произведение в V определить формулой:

а) $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$; б) $(x,y) = x_1\overline{y_2}$;

в) $(x,y) = ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1}$; г) $(x,y) = ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1}$;

д) $(x,y) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{bmatrix}$;

е) $(x,y) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{bmatrix}$; ж) $(x,y) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{bmatrix}$;

з) $(x,y) = [x_1\, x_2]\begin{bmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{bmatrix}$;

и) $(x,y) = x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$.

47.9. Пусть x_e и y_e – координатные столбцы векторов x и y в некотором базисе e двумерного комплексного линейного пространства V. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы равенство

$$(x,y) = x_e^T A\,\overline{y_e}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

задавало скалярное произведение в V.

47.10. Выяснить, можно ли скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ квадратных матриц порядка $n \geq 2$ ввести по формуле:

а) $(X,Y) = \operatorname{tr}(XY)$; б) $(X,Y) = \operatorname{tr}(XY^T)$;

в) $(X,Y) = \operatorname{tr}X \cdot \operatorname{tr}Y$; г) $(X,Y) = \det(XY)$;

д) $(X,Y) = \operatorname{tr}(X^TDY)$, где D – диагональная матрица порядка n с положительными элементами на главной диагонали.

47.11. Выяснить, какие из следующих правил определяют скалярное произведение в пространстве матриц $\mathbb{C}^{m\times n}$:

а) $(X,Y)=\operatorname{tr}(XY^T)$; б) $(X,Y)=\operatorname{tr}(XY^H)$;
в) $(X,Y)=\operatorname{tr}(\overline{X}Y^T)$.

47.12. Установить, какие из следующих правил определяют скалярное произведение в пространстве многочленов M_n с вещественными коэффициентами:

$$1)\quad (p,q)=\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(a)q^{(k)}(a), \tag{47.14}$$

где точка $a\in\mathbb{R}$ произвольна;

$$2)\quad (p,q)=\sum_{k=1}^{m} p(k)q(k). \tag{47.15}$$

Матрица Грама системы векторов

47.13. В вещественном n-мерном пространстве V скалярное произведение (x,y) задано как функция координат $x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_n$ векторов x и y в некотором базисе e пространства. Вычислить матрицы Грама базиса e и базиса, составленного из векторов $f_1,\dots,f_n$. Найти выражение для скалярного произведения (x,y) через координаты векторов x и y в базисе f:

1) $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2$;
   а) $(f_1)_e=(1,2)^T$, $(f_2)_e=(2,1)^T$;
   б) $(f_1)_e=(1,1)^T$, $(f_2)_e=(1,-1)^T$;
2) $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$;
   а) $(f_1)_e=(1,-1)^T$, $(f_2)_e=(1,1)^T$;
   б) $(f_1)_e=(1,-1)^T$, $(f_2)_e=(1,0)^T$;
3) $(x,y)=4x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+4x_2y_2$;
   а) $(f_1)_e=(1,0)^T$, $(f_2)_e=(1,-1)^T$;
   б) $(f_1)_e=(1/2,1/2)^T$, $(f_2)_e=(-1/2,1/2)^T$;
4) $(x,y)=4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+3x_3y_3$;
   а) $(f_1)_e=(1,0,0)^T$, $(f_2)_e=(1,-1,0)^T$, $(f_3)_e=(0,1,1)^T$;
   б) $(f_1)_e=(1,0,0)^T$, $(f_2)_e=(-1,2,0)^T$, $(f_3)_e=(-1,2,2)^T$.

47.14. В комплексном n-мерном пространстве V скалярное произведение (x,y) задано как функция координат $x_1,\dots,x_n$ и

$y_1, \ldots, y_n$ векторов x и y в некотором базисе e пространства. Вычислить матрицы Грама базиса e и базиса, составленного из векторов $f_1, \ldots, f_n$. Найти выражение для скалярного произведения (x, y) через координаты векторов x и y в базисе f:

1) $(x, y) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$;
   а) $(f_1)_e = (1, 0)^T$, $(f_2)_e = (1, -1)^T$;
   б) $(f_1)_e = (1, 0)^T$, $(f_2)_e = (-1, 1+i)^T$;

2) $(x, y) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$;
   а) $(f_1)_e = (1, 1, 0)^T$, $(f_2)_e = (-1, 1, 0)^T$, $(f_3)_e = (0, 0, 1)^T$;
   б) $(f_1)_e = (1, 0, 0)^T$, $(f_2)_e = (-i, 1, 0)^T$, $(f_3)_e = (1+2i, -2+i, 1)^T$.

47.15. Вычислить матрицу Грама G базиса $1, t, \ldots, t^n$ в евклидовом пространстве M_n многочленов со скалярным произведением, заданным:

а) равенством (47.8);
б) равенством (47.9), в котором $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;
в) равенством (47.9), в котором $t_1 = -1$, $t_2 = 1$;
г) равенством (47.14) (отдельно рассмотреть случай $a = 0$);
д) равенством (47.15), в котором $m > n$.

47.16. Пусть G и G' – матрицы Грама базисов e и e' евклидова (унитарного) пространства, связанных матрицей перехода S: $e' = eS$. Доказать, что:

1) в евклидовом пространстве $G' = S^T G S$;
2) в унитарном пространстве $G' = S^T G \overline{S}$.

Как связаны между собой определители матриц G и G'?

47.16.1. Выяснить, как изменяется определитель Грама $\det G(a_1, \ldots, a_k)$ системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ при:

а) перестановке двух векторов a_i и a_j;
б) умножении вектора a_i на число $\alpha \neq 0$;
в) прибавлении к вектору a_i другого вектора a_j $(j \neq i)$, умноженного на число β.

47.16.2. Доказать, что ранг матрицы Грама системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ совпадает с рангом этой системы.

47.17. Доказать положительность определителя матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n с элементами:

а) $a_{ij} = 2/(i+j-1)$, если $i+j$ четно, и $a_{ij} = 0$ иначе;
б) $a_{ij} = 1/(i+j-1)$ для всех $i, j = \overline{1, n}$.

47.18. Векторы x и y евклидова пространства заданы в базисе e координатными столбцами x_e и y_e соответственно, и известна

матрица Грама $G(f)$ базиса f. Вычислить матрицу Грама $G(e)$ базиса e и скалярное произведение векторов x и y, если:

1) $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 - 2e_2$,
$G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $x_e = [1\ 0]^T$, $y_e = [0\ -1]^T$;

2) $f_1 = 2e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$,
$G(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $x_e = [1\ 2]^T$, $y_e = [0\ 1]^T$;

3) $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$,
$G(f) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $x_e = [1\ 1]^T$, $y_e = [1\ 3]^T$;

4) $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_2 + e_3$,
$G(f) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x_e = [1\ 2\ 1]^T$, $y_e = [1\ 1\ -1]^T$;

5) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_2 + e_3$,
$G(f) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $x_e = [1\ -2\ 1]^T$, $y_e = [1\ 1\ 1]^T$.

47.19. Векторы x и y унитарного пространства заданы в базисе e координатными столбцами x_e и y_e соответственно, и известна матрица Грама $G(f)$ базиса f. Вычислить матрицу Грама $G(e)$ базиса e и скалярное произведение векторов x и y, если:

1) $f_1 = e_1 + ie_2$, $f_2 = -3ie_1 + 4e_2$,
$G(f) = \begin{bmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{bmatrix}$, $x_e = [1\ i]^T$, $y_e = [1+i\ 2]^T$;

2) $f_1 = e_1$, $f_2 = -ie_1 + 2e_2 + ie_3$, $f_3 = -ie_2 + e_3$,
$G(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3i & -1 \\ -3i & 22 & 10i \\ -1 & -10i & 5 \end{bmatrix}$, $x_e = [0\ 1\ 0]^T$, $y_e = [1\ -2i\ 1]^T$.

47.20. Пусть a – фиксированный вектор евклидова пространства V, α – заданное вещественное число. Будет ли множество всех векторов x, для которых $(x, a) = \alpha$, линейным подпространством пространства V?

47.21. Доказать, что всякое подпространство евклидова пространства V само является евклидовым пространством в смысле скалярного произведения, заданного в V.

47.22. Линейное пространство V разлагается в прямую сумму подпространств $L_1, \ldots, L_p$. На каждом из подпространств L_i определено скалярное произведение $(x, y)_i$, $\forall x, y \in L_i$. Доказать, что можно ввести скалярное произведение во всем пространстве V, положив

$$(x, y) = (x_1, y_1)_1 + \ldots + (x_p, y_p)_p,$$

если векторы x и y имеют разложения по подпространствам соответственно: $x = x_1 + \ldots + x_p$ и $y = y_1 + \ldots + y_p$.

47.23. На подпространстве L линейного пространства V введено скалярное произведение (x, y). Доказать, что можно определить скалярное произведение во всем V так, что для векторов x и y из L оно будет совпадать с первоначально заданным скалярным произведением (x, y).

Неравенство Коши–Буняковского

47.24. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, доказать следующие неравенства:

а) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2\right)$;

б) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2 / \lambda_i\right)$.

Здесь числа $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, произвольны, а числа $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, произвольны и положительны.

47.25. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского для унитарного пространства, доказать неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right),$$

где числа $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$, произвольны.

47.26. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, доказать неравенство

$$\left(\int_a^b f(t) g(t)\, dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\, dt \int_a^b g^2(t)\, dt,$$

где $f(t)$, $g(t)$ – произвольные вещественнозначные непрерывные на $[a, b]$ функции.

47.27. Доказать, что неравенство

$$[\mathrm{tr}(A^TB)]^2 \le \mathrm{tr}(A^TA)\,\mathrm{tr}(B^TB)$$

выполнено для любых вещественных матриц A и B одинакового размера.

47.28. Доказать, что для любых вещественных квадратных матриц A и B одинакового порядка выполнено неравенство:

а) $[\mathrm{tr}(AB)]^2 \le \mathrm{tr}(A^TA)\,\mathrm{tr}(B^TB)$;

б) $\mathrm{tr}(A^TA) \ge \frac{1}{n}(\mathrm{tr}\,A)^2$.

47.29. Пусть в определении скалярного произведение четвертая аксиома заменена на более слабое требование: $(x,x) \ge 0$ для любого $x \in V$. Доказать, что в пространстве V с таким «скалярным произведением»:

а) выполняется неравенство Коши–Буняковского;

б) выполняется неравенство треугольника;

в) множество M векторов x, для которых $(x,x) = 0$, образует подпространство;

г) для любого $x \in M$ и любого вектора $y \in V$ скалярное произведение (x,y) равно нулю;

д) если N – произвольное дополнительное к M подпространство, и $x = x_M + x_N$, $y = y_M + y_N$ – разложения векторов x и y по подпространствам M и N, то знак равенства в неравенстве Коши–Буняковского для векторов x и y имеет место тогда и только тогда, когда x_N и y_N линейно независимы.

47.30. Сохранится ли неравенство Коши–Буняковского в случае, если в определении скалярного произведения отказаться от четвертой аксиомы?

Длина вектора

47.31. Найти длину вектора:

1) $a = (5,4,3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением;

2) $a = (1,-2,3,4)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением;

3) $a = (1,1)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$;

4) $a = (1,-1,2)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ со скалярным произведе-

нием $(x,y)=x\begin{bmatrix}4&2&2\\2&2&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}y^T$;

5) $a=(1,i)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$ со скалярным произведением $(x,y)=x\begin{bmatrix}2&1+i\\1-i&2\end{bmatrix}\overline{y}^T$;

6) $a=(1+i,1,-i)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$ со скалярным произведением $(x,y)=x\begin{bmatrix}1&-i&0\\i&2&2+i\\0&2-i&6\end{bmatrix}\overline{y}^T$.

47.32. Доказать, что для любых векторов x и y выполнено равенство

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2.$$

Какой смысл имеет это соотношение в пространстве V_3 геометрических векторов?

47.32.1. Доказать, что в евклидовом пространстве неравенство треугольника обращается в равенство, т.е.

$$|x+y|=|x|+|y|, \tag{47.16}$$

тогда и только тогда, когда либо один из векторов x или y нулевой, либо $y=\alpha x$, где число α положительно.

47.32.2. Доказать, что в унитарном пространстве неравенство треугольника обращается в равенство (47.16) тогда и только тогда, когда либо один из векторов x или y нулевой, либо $y=\alpha x$, где α – действительное положительное число.

47.33. Показать, что для любого вектора x конечномерного евклидова (унитарного) пространства V выполнено соотношение

$$|x|=\sup_{y\in V,\,y\neq\theta}\frac{|(x,y)|}{|y|}.$$

§48. Ортогональные векторы

Два вектора $x,y\in E\,(U)$ называются *ортогональными*, если $(x,y)=0$. Система векторов $x_1,\ldots,x_k\in E\,(U)$ называется *ортогональной*, если

$$(x_i,x_j)=0 \quad \text{при} \quad i\neq j.$$

Система векторов $x_1,\ldots,x_k\in E\,(U)$ называется *ортонормированной системой*, если

$$(x_i,x_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Теорема 48.1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Следствие 1. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

Следствие 2. *В n-мерном евклидовом (унитарном) пространстве любая ортонормированная система из n векторов образует базис.* Этот базис называется *ортонормированным базисом.*

Пример 48.1. Известно, что скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ задано стандартным образом. Дополнить векторы $e_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^4$.

Решение. Найдем какой-либо ненулевой вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ортогональный векторам e_1 и e_2:

$$\begin{cases} (x, e_1) = 0, \\ (x, e_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является, например, вектор $x = (0, 1, 1, 0)$. После нормировки получим вектор $e_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Найдем теперь новый ненулевой вектор x так, чтобы он был ортогонален векторам e_1, e_2 и e_3:

$$\begin{cases} (x, e_1) = 0, \\ (x, e_2) = 0, \\ (x, e_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = (-1, 1, -1, 3)$. Положим $e_4 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$. Тогда система векторов e_1, e_2, e_3, e_4 ортонормирована и, так как $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, она образует ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^4$. ▪

Теорема 48.2. *В евклидовом (унитарном) пространстве координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x в базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ вычисляются по правилу*

$$x_i = (x, e_i), \quad i = \overline{1, n},$$

тогда и только тогда, когда e – ортонормированный базис.

Теорема 48.3. *В евклидовом (унитарном) пространстве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

тогда и только тогда, когда e – ортонормированный базис.

В евклидовом пространстве черта комплексного сопряжения в последнем равенстве может быть опущена: $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Теорема 48.4. *В конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве существует ортонормированный базис.*

Процесс ортогонализации позволяет построить из произвольной линейно независимой системы векторов $f_1, \ldots, f_m$ ортогональную систему ненулевых векторов $g_1, \ldots, g_m$ и состоит в следующем. Полагаем $g_1 = f_1$. Последующие векторы $g_1, \ldots, g_m$ находятся из рекуррентных формул

$$g_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} g_j.$$

Коэффициенты α_{kj} однозначно определяются условием ортогональности вектора g_k векторам $g_1, \ldots, g_{k-1}$:

$$\alpha_{kj} = \frac{(f_k, g_j)}{(g_j, g_j)}.$$

Нормируя векторы $g_1, \ldots, g_m$, приходим к ортонормированному базису подпространства $\mathcal{L}(f_1, \ldots, f_m)$.

Описанный алгоритм называется *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Пример 48.2. В пространстве $\mathbf{R}^4$ со стандартным скалярным произведением построить ортонормированный базис линейного подпространства L, натянутого на векторы $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (2, 0, 1, -1)$, $a_3 = (4, 2, 3, 1)$.

Решение. Векторы a_1, a_2, a_3, как нетрудно проверить, линейно независимы. Для построения ортонормированного базиса подпространства L применим процесс ортогонализации к системе векторов a_1, a_2, a_3.

1) Положим $f_1 = a_1$ и возьмем $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$.

2) Построим вектор f_2 так, чтобы он линейно выражался через векторы a_1, a_2 и был ортогонален вектору a_1. Согласно описанному выше алгоритму этого можно добиться, определив f_2 равенством

$$f_2 = a_2 - \frac{(a_2, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1.$$

Отсюда $f_2 = (2, 0, 1, -1) - (1, 1, 0, 0) = (1, -1, 1, -1)$.

Так как $(f_2, f_2) = 4$, то возьмем $e_2 = \frac{1}{2} f_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

3) Построим вектор f_3 так, чтобы он линейно выражался через векторы a_1, a_2, a_3 или, что то же самое, через векторы f_1, f_2, a_3 и был ортогонален векторам a_1, f_2. Этого можно добиться, определив f_3 равенством

$$f_3 = a_3 - \frac{(a_3, a_1)}{(a_1, a_1)} f_1 - \frac{(a_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2.$$

Отсюда $f_3 = (4, 2, 3, 1) - 3(1, 1, 0, 0) - (1, -1, 1, -1) = (0, 0, 2, 2)$.

Так как $(f_3, f_3) = 8$, то возьмем $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} f_3 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Тем самым, система e_1, e_2, e_3 ортонормирована, принадлежит подпространству L и, следовательно, образует ортонормированный базис L. ∎

Пример 48.3. В пространстве M_3 со стандартным скалярным произведением построить ортонормированный базис линейного подпространства L всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $f'(-1) = 0$.

Решение. Если $f(t) = x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t + x_4$, то условие $f'(-1) = 0$ равносильно равенству

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \qquad (48.1)$$

1) Возьмем любое нетривиальное решение (48.1): например, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$ и обозначим через $f_1(t)$ соответствующий этому решению многочлен. Таким образом, $f_1(t) = 1$ и $f_1(t) \in L$.

2) Построим ненулевой многочлен $f_2(t)$, принадлежащий L и ортогональный многочлену $f_1(t)$. Коэффициенты такого многочлена удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Нетривиальным решением этой системы является, например, набор $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Тем самым, $f_2(t) = t^2 + 2t$.

Ненулевые многочлены $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в силу ортогональности линейно независимы, однако они не образуют базис в L, так как $\dim L = 3$.

3) Построим, наконец, третий ненулевой многочлен $f_3(t)$, принадлежащий L и ортогональный обоим многочленам $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Коэффициенты такого многочлена удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда, например, $x_1 = -5$, $x_2 = -6$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$ и, соответственно, $f_3(t) = -5t^3 - 6t^2 + 3t$.

Итак, многочлены $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ образуют ортогональный базис пространства L. После нормировки получим искомый ортонормированный базис:

$$e_1(t) = f_1(t) = 1, \quad e_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} t^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} t,$$

$$e_3(t) = \frac{1}{\sqrt{70}} f_3(t) = -\frac{5}{\sqrt{70}} t^3 - \frac{6}{\sqrt{70}} t^2 + \frac{3}{\sqrt{70}} t. \quad \blacksquare$$

Матрица $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется *унитарной*, если

$$UU^H = U^H U = I.$$

Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *ортогональной*, если

$$QQ^T = Q^T Q = I.$$

Теорема 48.5. *Матрица ортогональна (унитарна) тогда и только тогда, когда она является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису евклидова (унитарного) пространства.*

Две системы векторов $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ в унитарном (евклидовом) пространстве называются *биортогональными*, если

$$(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 48.6. *Каждая система из пары биортогональных систем векторов линейно независима.*

Биортогональные системы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$, образующие базисы пространства V, называют *биортогональной парой базисов.*

Теорема 48.7. *Для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ унитарного (евклидова) пространства существует, и притом единственный, биортогональный базис $f_1, \ldots, f_n$.*

Пример 48.4. Построить базис пространства M_2, биортогональный

базису

$$e_1(t) = 1 + 2t + t^2,\ e_2(t) = 1 - t,\ e_3(t) = 2 + 2t + t^2.$$

если известно, что скалярное произведение в пространстве M_2 задано соотношением (47.8).

Р е ш е н и е. Так как пространство M_2 со скалярным произведением (47.8) изоморфно пространству $\mathbb{R}^3$ со скалярным произведением (47.1), то решим аналогичную задачу для базиса $e_1 = (1,2,1)$, $e_2 = (1,-1,0)$, $e_3 = (2,2,1)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

Пусть система векторов f_1, f_2, f_3 биортогональна к системе e_1, e_2, e_3. Тогда

$$\begin{cases} (e_1,f_1)=1, \\ (e_2,f_1)=0, \\ (e_3,f_1)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} (e_1,f_2)=0, \\ (e_2,f_2)=1, \\ (e_3,f_2)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} (e_1,f_3)=0, \\ (e_2,f_3)=0, \\ (e_3,f_3)=1, \end{cases}$$

и следовательно, нужно решить три системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_1+x_3=1, \\ x_1-x_2=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+2x_1+x_3=0, \\ x_1-x_2=1, \\ 2x_1+2x_2+x_3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+2x_1+x_3=0, \\ x_1-x_2=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$$

Так как матрица коэффициентов одинакова у всех этих трех систем, то решим их одновременно, составив следующую расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Отсюда $f_1 = (-1,-1,4)$, $f_2 = (0,-1,2)$, $f_3 = (1,1,-3)$.

Таким образом, искомый биортогональный базис образуют многочлены $f_1(t) = -1 - t + 4t^2$, $f_2(t) = -t + 2t^2$, $f_3(t) = 1 + t - 3t^2$. ▪

З А Д А Ч И

Понятие ортогональности

48.1. Доказать, что в евклидовом пространстве E:

1) вектор f ортогонален всем векторам из E тогда и только тогда, когда вектор f нулевой;

2) векторы f и g удовлетворяют соотношению $(f,x) = (g,x)$ для любого вектора $x \in E$ тогда и только тогда, когда $f = g$.

Верны ли эти утверждения в унитарном пространстве?

48.2. Доказать, что если $x_1, \ldots, x_k$ – ортогональная система векторов, то для любых чисел λ_i, $i = \overline{1,k}$, система векторов $\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_k x_k$ также будет ортогональна.

48.3. Пусть вектор x евклидова или унитарного пространства ортогонален каждому из векторов $f_1, \ldots, f_k$. Доказать, что x ортогонален и любому вектору из линейной оболочки векторов $f_1, \ldots, f_k$.

48.4. Доказать, что если в евклидовом пространстве для любого числа α выполнено неравенство $|x + \alpha y| \geq |x|$, то векторы x и y ортогональны. Верно ли это утверждение в унитарном пространстве?

48.5. Доказать, что в евклидовом пространстве выполнено тождество

$$4(x, y) = |x + y|^2 - |x - y|^2.$$

48.6. Доказать, что в унитарном пространстве выполнено тождество

$$4(x, y) = |x + y|^2 - |x - y|^2 + i|x + iy|^2 - i|x - iy|^2.$$

48.7. Последовательность векторов $\{a_k\}$ n-мерного евклидова (унитарного) пространства называется *сходящейся* к вектору a, если $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k - a| = 0$. Доказать, что

1) если последовательность векторов $\{f_k\}$ сходится к вектору f, то числовая последовательность $\{|f_k|\}$ сходится к $|f|$;

2) если последовательности векторов $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ сходятся соответственно к векторам f и g, то

$$\lim_{k\to\infty} (f_k, g_k) = (f, g).$$

48.8. Верно ли, что произвольная система попарно ортогональных векторов линейно независима?

48.9. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ и $g_1, \ldots, g_m$ – две линейно независимые ортогональные системы векторов евклидова или унитарного пространства, которые обладают следующим свойством: при любом $k = \overline{1, m}$ линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1, \ldots, f_k)$ совпадает с линейной оболочкой $\mathcal{L}(g_1, \ldots, g_k)$. Доказать, что $g_k = \gamma_k f_k$, $k = \overline{1, m}$, при некоторых отличных от нуля коэффициентах γ_k.

Ортогональные базисы

48.10. Доказать, что если система векторов арифметического пространства $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}), \\ x_2 &= (0, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2n}), \\ x_3 &= (0, 0, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{3n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (0, 0, 0, \ldots, \alpha_{nn}) \end{aligned}$$

образует ортогональный базис этого пространства, то: а) $\alpha_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$; б) $\alpha_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

48.11. Доказать, что естественный базис арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$) со стандартным скалярным произведением является ортонормированным базисом.

48.11.1. Доказать, что векторы $a_1, \ldots, a_n$ арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ образуют ортонормированный базис относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда матрица A, составленная из этих векторов как строк, ортогональна (т.е. $A^{-1} = A^T$). Показать, что столбцы такой матрицы A также образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

48.12. Пусть относительно стандартного скалярного произведения арифметического пространства вектор-столбцы u_1, u_2, u_3 образуют ортонормированный базис $\mathbb{R}^3$, а вектор-столбцы v_1, v_2 – ортонормированный базис $\mathbb{R}^2$. Показать, что если $A = u_1 v_1^T + u_2 v_2^T$, то $A^T A = I$.

48.13. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) имеется ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$ такой, что все компоненты каждого из векторов e_i равны 1 или -1. Доказать, что n равно 2 или кратно 4.

48.14. Построить какой-либо ортонормированный базис евклидова (унитарного) пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) со стандартным скалярным произведением.

48.15. Построить какой-либо ортонормированный базис евклидова пространства M_n со скалярным произведением, определяемым:

1) равенством (47.8);
2) равенством (47.14);
3) равенством (47.15) при $m = n + 1$.

48.16. Доказать, что координаты x_i произвольного вектора x n-мерного евклидова (унитарного) пространства в ортогональном базисе $e_1, \ldots, e_n$ можно вычислить по формуле

$$x_i = (x, e_i)/(e_i, e_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Вывести отсюда равенство $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|(x, e_i)|^2}{(e_i, e_i)}$.

48.17. Доказать, что в евклидовом (унитарном) пространстве длина вектора x, заданного своими координатами $x_1, \ldots, x_n$ в базисе e, вычисляется по правилу

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

тогда и только тогда, когда e – ортонормированный базис пространства.

48.18. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства. Найти выражение для скалярного произведения произвольных векторов x и y через их координаты:

а) в базисе $\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \ldots, \lambda_n e_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – ненулевые числа;

б) в базисе $e_1 + e_2, e_2, e_3, \ldots, e_n$.

48.19. Пусть V – вещественное или комплексное линейное пространство и $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый его базис. Доказать, что в V можно ввести скалярное произведение так, чтобы этот базис стал ортонормированным. Единственным ли образом это можно сделать?

48.20. В пространстве M_n многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами произвольным образом введено скалярное произведение. Доказать, что в полученном евклидовом пространстве:

а) существует ортогональный базис, содержащий по одному многочлену каждой степени $k = \overline{0, n}$;

б) если $f_0(t)$, $f_1(t), \ldots$, $f_n(t)$ и $g_0(t)$, $g_1(t), \ldots$, $g_n(t)$ – два ортогональных базиса, обладающих указанным в п. а) свойством, то (при соответствующей нумерации) многочлены, входящие в эти базисы, различаются лишь скалярным множителем: $g_i(t) = \alpha_i f_i(t)$, $i = \overline{0, n}$.

48.21. В пространстве M_n ввести скалярное произведение

так, чтобы базис

$$1,\ t,\ \frac{t^2}{2!},\ \ldots,\ \frac{t^n}{n!}$$

стал ортонормированным.

48.21.1. В пространстве $\mathbb{R}^n$ ввести скалярное произведение, относительно которого указанные системы векторов образуют ортонормированный базис:

а) $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (1,1,0,\ldots,0)$, $e_3 = (1,0,1,\ldots,0)$, ... $e_n = (1,0,0,\ldots,1)$;

б) $e_1 = (1,1,1,\ldots,1,1)$, $e_2 = (0,1,1,\ldots,1,1)$, $e_3 = (0,0,1,\ldots,1,1)$, ... $e_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$.

Процесс ортогонализации

48.22. Найти какой-нибудь нормированный вектор, ортогональный к указанной системе векторов вещественного арифметического пространства с соответствующим скалярным произведением:

1) $(2,2,1)$, $(-2,2,3)$, скалярное произведение стандартное;

2) $(1,2,1,0)$, $(1,1,1,1)$, скалярное произведение стандартное;

3) $(1,-1,2)$, скалярное произведение стандартное;

4) $(1,1)$, скалярное произведение задано равенством $(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$;

5) $(1,2,0)$, $(2,0,-1)$, скалярное произведение задано равенством $(x,y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$.

48.23. Найти какой-нибудь нормированный вектор, ортогональный к указанной системе векторов комплексного арифметического пространства с соответствующим скалярным произведением:

1) $(1+i, 1-i)$, скалярное произведение стандартное;

2) $(-1, 1+i, 0)$, $(0,1,i)$, скалярное произведение стандартное;

3) $(1,i,0)$, $(i,1,0)$, скалярное произведение задано равенством $(x,y) = x_1\overline{y_1} + 5x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + ix_2\overline{y_3} - ix_3\overline{y_2}$.

48.24. Доказать, что процесс ортогонализации, примененный к линейно независимой системе векторов $f_1,\ldots,f_k$, приводит к ортогональной системе ненулевых векторов $g_1,\ldots,g_k$.

48.25. Применить процесс ортогонализации к линейно независимой системе векторов вещественного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1) $f_1 = (1, -3, 1)$, $f_2 = (4, -5, 3)$;
2) $f_1 = (1, 0, -1, 2)$, $f_2 = (2, 1, -1, 3)$;
3) $f_1 = (2, 0, -1)$, $f_2 = (5, -1, 0)$, $f_3 = (1, 7, -3)$;
4) $f_1 = (1, 2, 2)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 1, -4)$;
5) $f_1 = (2, 1, -2)$, $f_2 = (4, 1, 0)$, $f_3 = (0, 1, 0)$;
6) $f_1 = (1, 1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 2, 0, -1)$, $f_3 = (0, 0, 1, 0)$.

48.26. Пусть в результате применения процесса ортогонализации к системе векторов $f_1, \ldots, f_k$ получается система $g_1, \ldots, g_k$. Доказать, что:

1) если система векторов $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависима, а ее подсистема $f_1, \ldots, f_{k-1}$ линейно независима, то векторы $g_1 \ldots$, g_{k-1} ненулевые, а $g_k = \theta$;

2) если векторы $g_1, \ldots, g_{k-1}$ в получаемой системе ненулевые, а $g_k = \theta$, то в исходной системе векторы $f_1, \ldots, f_{k-1}$ линейно независимы, а вектор f_k через них линейно выражается.

48.27. Показать, что тригонометрическая система функций $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$ ортогональна относительно скалярного произведения (47.9) с $t_1 = -\pi$ и $t_2 = \pi$.

48.28. В пространстве многочленов M_3 со скалярным произведением (47.9), в котором $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2, t^3$.

48.29. Доказать, что в пространстве многочленов M_n со скалярным произведением (47.9), в котором $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, многочлены Лежандра

$$P_0(t) = 1, \quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k}(t^2 - 1)^k, \quad k = \overline{1, n},$$

образуют ортогональный базис.

48.30. Доказать, что:

а) любой ненулевой вектор можно включить в некоторый ортогональный базис евклидова пространства;

б) любую ортогональную систему ненулевых векторов можно дополнить до ортогонального базиса пространства.

48.31. Дополнить следующие системы векторов до ортогональных базисов пространства $\mathbb{R}^4$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ введено стандартным образом):

1) $a_1 = (1, -2, 1, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 1)$;
2) $a_1 = (1, -1, 1, -3)$, $a_2 = (-4, 1, 5, 0)$;
3) $a_1 = (1, 1, 1, 2)$, $a_2 = (1, 0, 1, -1)$;

4) $a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1)$.

48.32. Дополнить следующие системы векторов до ортогональных базисов пространства $\mathbb{C}^3$ (скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$ введено стандартным образом):

1) $a_1 = (1, 1-i, 2)$, $a_2 = (2, -5+3i, 3+i)$;

2) $a_1 = (-i, 2, -4+i)$, $a_2 = (4-i, -1, i)$.

48.33. Дополнить следующие системы векторов до ортонормированных базисов соответствующего арифметического пространства (скалярное произведение считается введенным стандартным образом):

1) $a_1 = \left(-\frac{11}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{3}\right)$, $a_2 = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{14}{15}, -\frac{1}{3}\right)$;

2) $a_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $a_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

3) $a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$;

4) $a_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

48.34. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

1) $a_1 = (2, 3, -4, -6)$, $a_2 = (1, 8, -2, -16)$,
$a_3 = (12, 5, -14, 5)$, $a_4 = (3, 11, 4, -7)$;

2) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (-2, 1, 5, 11)$,
$a_3 = (0, 3, 3, 7)$, $a_4 = (3, -3, -3, -9)$.

48.35. В пространстве $\mathbb{C}^3$ со стандартным скалярным произведением построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

1) $a_1 = (2, 1, -i)$, $a_2 = (3+i, 0, -2)$, $a_3 = (0, 6-i, 1)$;

2) $a_1 = (0, 1-i, 2)$, $a_2 = (1, 2, 2-i)$, $a_3 = (i, 2, 5+2i)$.

48.36. Найти размерность подпространства, образованного всеми векторами x, для которых $(a, x) = 0$, где a – некоторый фиксированный ненулевой вектор рассматриваемого n-мерного евклидового пространства.

48.37. Подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением описано системой линейных уравнений. Найти какой-либо ортонормированный базис

L, если система имеет вид:

1) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$; 2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 14x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 8x_4 - 7x_5 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

48.38. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ – линейно независимая система векторов евклидова (унитарного) пространства, $g_1, \ldots, g_k$ – система, полученная из нее процессом ортогонализации. Доказать, что

$$\det G(f_1, \ldots, f_k) = \det G(g_1, \ldots, g_k) = |g_1|^2 \ldots |g_k|^2.$$

Биортогональные системы

48.39. Пусть $G = G(e_1, \ldots, e_n)$ – матрица Грама базиса $e_1, \ldots, e_n$ евклидова пространства E. Найти матрицу перехода к биортогональному базису $f_1, \ldots, f_n$ и его матрицу Грама.

48.40. Пусть S – матрица перехода от базиса e к базису e'. Найти матрицу перехода от базиса f, биортогонального для базиса e, к базису f', биортогонального к e':

а) в евклидовом пространстве;

б) в унитарном пространстве.

48.41. Доказать, что определитель Грама любой системы векторов не превосходит произведения квадратов длин векторов системы, причем равенство имеет место только в случае, когда либо векторы попарно ортогональны, либо один из них нулевой.

48.42. Доказать, что в евклидовом (унитарном) пространстве каждая из двух биортогональных систем векторов $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_k$ линейно независима.

48.43. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ – биортогональная пара базисов в евклидовом (унитарном) пространстве E (U). Доказать, что координаты произвольного вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$ вычисляются по формулам

$$x_i = (x, f_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

48.44. Пусть x_e и y_f – координатные столбцы векторов x и y соответственно в базисах e и f евклидова пространства E. Доказать, что равенство

$$(x, y) = x_e^T y_f$$

выполнено тогда и только тогда, когда базисы e и f образуют биортогональную пару. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение в унитарном пространстве U.

48.45. Пусть E – n-мерное евклидово (унитарное) пространство. Доказать, что для всякой линейно независимой системы векторов $e_1, \ldots, e_k$, $k < n$, существует биортогональная система. Указать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы каждая из двух систем векторов составляла с системой $e_1, \ldots, e_k$ биортогональную пару.

48.46. Пусть E – конечномерное евклидово (унитарное) пространство. Доказать, что система векторов $e_1, \ldots, e_k$ имеет единственную биортогональную систему тогда и только тогда, когда векторы $e_1, \ldots, e_k$ образуют базис пространства E.

48.47. Пусть e и f – биортогональная пара базисов в евклидовом (унитарном) пространстве E (U), x_e и x_f – координатные столбцы произвольного вектора x в базисах e и f соответственно, а $G(e)$ и $G(f)$ – матрицы Грама этих базисов. Доказать, что:

1) $f = eG^T(f)$; 2) $x_f = G^T(e)x_e$.

Найти биортогональные базисы для следующих базисов вещественного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением.

48.48. $e_1 = (1,3)$, $e_2 = (1,5)$.

48.49. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,2,0)$, $e_3 = (0,0,3)$.

48.50. $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,2,3)$, $e_3 = (1,4,9)$.

48.51. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (3,1,0)$, $e_3 = (-2,-5,1)$.

48.52. $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (0,1,2,0)$, $e_3 = (0,0,3,1)$, $e_4 = (0,0,2,1)$.

48.53. $e_1 = (-2,1,1,1)$, $e_2 = (1,-2,1,1)$, $e_3 = (1,1,-2,1)$, $e_4 = (1,1,1,-2)$.

48.54. $e_1 = (1,1,1,1)$, $e_2 = (1,1,1,0)$, $e_3 = (1,1,0,0)$, $e_4 = (1,0,0,0)$.

48.55. Найти биортогональный базис для базиса $e_1 = (1,0,i)$, $e_2 = (1,i,0)$, $e_3 = (0,1,1+i)$ пространства $\mathbb{C}^3$ со стандартным

скалярным произведением.

48.56. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением построить систему векторов, биортогональную указанной системе векторов и принадлежащую их линейной оболочке:

а) $e_1 = (1,1,1,1)$, $e_2 = (1,1,1,0)$;

б) $e_1 = (1,1,0,1)$, $e_2 = (1,0,-1,0)$, $e_3 = (0,0,-1,1)$.

48.57. Пусть в пространстве многочленов M_3 скалярное произведение задано равенством (47.9), в котором $t_1 = -1$, $t_2 = 1$.

1) Построить систему векторов, биортогональную системе 1, t, t^2 и принадлежащую линейной оболочке этих векторов.

2) Построить базис M_3, биортогональный базису 1, t, t^2, t^3.

§49. Ортогональные подпространства

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) пространства E (U). Вектор x называется *ортогональным к подпространству* L, если он ортогонален любому вектору $y \in L$. Обозначение: $x \perp L$.

Очевидно, что $x \perp \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ тогда и только тогда, когда $x \perp a_i$, $i = \overline{1,k}$. Совокупность всех векторов $x \in E$ (U), ортогональных подпространству L, называется *ортогональным дополнением* к L. Обозначение: $L^\perp$.

Теорема 49.1. *Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.*

Пример 49.1. Найти ортогональное дополнение к линейному подпространству L, натянутому на векторы $a_1 = (1,4,-2,1)$, $a_2 = (2,5,-1,-2)$, $a_3 = (1,-2,4,-7)$, $a_4 = (1,7,-5,5)$. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ введено стандартным образом.

Решение. Вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ принадлежит ортогональному дополнению к подпространству $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ в том и только том случае, когда он ортогонален каждому вектору a_i, $i = \overline{1,4}$:

$$\begin{cases} (x, a_1) = 0, \\ (x, a_2) = 0, \\ (x, a_3) = 0, \\ (x, a_4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Опишем множество решений этой системы, построив ее фундаментальную систему решений:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_1 = (13,-4,0,3), \quad e_2 = (-2,1,1,0).$$

Построенная фундаментальная система решений e_1, e_2 образует базис пространства решений системы, и следовательно, является базисом ортогонального дополнения $L^\perp$. Таким образом, $L^\perp = \mathcal{L}(e_1, e_2)$. ▪

Пример 49.2. Найти ортогональное дополнение к подпространству L, заданному системой

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ введено стандартным образом.

Решение. Обозначим через a_1, a_2, a_3, a_4 векторы, компоненты которых являются коэффициентами заданной системы уравнений: $a_1 = (1, 4, -2, 1)$, $a_2 = (2, 5, -1, -2)$, $a_3 = (1, -2, 4, -7)$, $a_4 = (1, 7, -5, 5)$. Из правила (47.1), задающего скалярное произведение, следует, что вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ принадлежит подпространству L тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} (x, a_1) = 0, \\ (x, a_2) = 0, \\ (x, a_3) = 0, \\ (x, a_4) = 0, \end{cases} \iff x \perp \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Это означает, что $L^\perp = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и для построения базиса ортогонального дополнения достаточно найти базис указанной линейной оболочки:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \\ 1 & 7 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ 3a_1 - 2a_2 + a_3 \\ -3a_1 + a_2 + a_4 \end{matrix}$$

Отсюда следует, что базис $L^\perp$ образуют векторы

$$e_1 = (1, 4, -2, 1),\ e_2 = (0, -3, 3, -4). \quad ▪$$

Теорема 49.2. *Если L – линейное подпространство $E(U)$, то*

$$L \oplus L^\perp = E\,(U).$$

Следствие. Если L – линейное подпространство $E\,(U)$, то для любого вектора $f \in E\,(U)$ существует, и притом единственное, разложение

$$f = g + h, \tag{49.1}$$

где $g \in L$, $h \perp L$.

Вектор g в разложении (49.1) называется *ортогональной проекцией вектора f на подпространство L*, а вектор h – *ортогональной составляющей вектора f*.

Задачу разложения (49.1) вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую называют *задачей о перпендикуляре*. Ортогональную составляющую h в разложении (49.1) называют также *перпендикуляром, опущенным из вектора f на подпространство L*, а сам вектор f – *наклонной к подпространству L*.

Подпространства L_1 и L_2 евклидова (унитарного) пространства называются *ортогональными*, если любой вектор каждого из них ортогонален другому подпространству. Сумма конечного числа попарно ортогональных подпространств называется *ортогональной суммой*.

Пример 49.3. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $f = (5, 8, -4, -1)$ на подпространство L, натянутое на векторы $a_1 = (1, 4, -2, 1)$, $a_2 = (2, 5, -1, -2)$. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ введено стандартным образом.

Решение. Заметим, что векторы a_1, a_2 образуют базис L. В силу определения ортогональной проекции требуется построить разложение $f = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^\perp$, или, что то же самое, найти такие числа $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и такой вектор $h \in L^\perp$, что

$$f = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + h.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на векторы a_1 и a_2. Так как $(h, a_1) = (h, a_2) = 0$, то получим

$$\begin{cases} (f, a_1) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_1), \\ (f, a_2) = \alpha_1 (a_1, a_2) + \alpha_2 (a_2, a_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 22\alpha_1 + 22\alpha_2 = 44, \\ 22\alpha_1 + 34\alpha_2 = 56 \end{cases} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 1.$$

Таким образом, вектор $g = a_1 + a_2 = (3, 9, -3, -1)$ – ортогональная проекция вектора f на подпространство L, а вектор $h = f - g = (2, -1, -1, 0)$ – его ортогональная составляющая.

Замечание. Отметим, что в этом решении сначала найдена проекция $g = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, а потом перпендикуляр $h = f - g$. Очевидно, что можно было бы сначала искать перпендикуляр $h = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, предварительно построив базис b_1, b_2 подпространства $L^\perp$. В данной задаче базис L уже дан (это векторы a_1, a_2), – этим оправдано то, что поиск ортогональной проекции и перпендикуляра начат с проекции.

Вообще говоря, построение базиса как L, так и $L^\perp$, не столь затруднительно. Более трудоемко составление и решение системы с матрицей Грама базисных векторов. Поэтому при выборе вектора, с которого надо начинать разложение вектора f, желательно учитывать размерности этих подпространств: если $\dim L < \dim L^\perp$, то лучше начинать разложение с проекции g, а если $\dim L > \dim L^\perp$, то с h. ▪

Пример 49.4. Найти ортогональную проекцию матрицы $F = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ на подпространство L всех квадратных матриц второго порядка с нулевым следом. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ введено стандартным образом.

Решение. В силу изометрии евклидовых пространств $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $\mathbb{R}^4$ со стандартными скалярными произведениями поставленная задача эквивалентна следующей задаче:

найти ортогональную проекцию вектора $f = (5, 3, 4, 3)$ на подпространство L: $x_1 + x_4 = 0$.

Как следует из решения примера 49.2, ортогональное дополнение $L^\perp$ является линейной оболочкой, натянутой на вектор $a_1 = (1, 0, 0, 1)$. Поэтому (см. замечание к примеру 49.3) разложение $f = g + h$, $g \in L$, $h \in L^\perp$, будем искать в виде

$$f = g + \alpha_1 a_1,\ g \in L,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на вектор a_1. Так как $(g, a_1) = 0$, то получим

$$(f, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \iff 2\alpha_1 = 8 \iff \alpha_1 = 4.$$

Таким образом, вектор $h = 4a_1 = (4, 0, 0, 4)$ – ортогональная составляющая вектора f, а вектор $g = f - h = (1, 3, 4, -1)$ – ортогональная проекция вектора f на подпространство L.

Итак, ортогональной проекцией матрицы F на указанное подпространство является матрица $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. ▪

Пример 49.5. Найти ортогональную проекцию многочлена $f(t) = 2 + 4t + 2t^2$ на подпространство L многочленов степени не выше 4, имеющих корни $t = -1$, $t = 0$ и $t = 1$. Скалярное произведение в пространстве M_4 введено стандартным образом.

Решение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$ имеет корни $t = -1$, $t = 0$ и $t = 1$ в том и только том случае, если

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0. \end{cases}$$

Поэтому в силу изометрии пространств M_4 и $\mathbf{R}^5$ со стандартными скалярными произведениями поставленная задача эквивалентна следующей задаче:

найти ортогональную проекцию вектора $f = (2, 4, 2, 0, 0)$ на подпространство L, заданное системой

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Исследуем пространство решений последней системы:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0. \end{array}\right] \qquad (49.2)$$

Отсюда $\dim L = 2$ и $\dim L^\perp = 3$. Так как $\dim L < \dim L^\perp$ (см. замечание к примеру 49.3), то будем искать разложение $f = g + h$, $g \in L$, $h \in L^\perp$, в виде

$$f = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + h, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}, h \in L^\perp, \qquad (49.3)$$

где e_1, e_2 – какой-либо базис пространства L. Построив фундаментальную систему решений системы (49.2), получим

$$e_1 = (0, 0, -1, 0, 1), \; e_2 = (0, -1, 0, 1, 0).$$

Из (49.3) следует:

$$\begin{cases} (f, e_1) = \alpha_1(e_1, e_1) + \alpha_2(e_2, e_1), \\ (f, e_2) = \alpha_1(e_1, e_2) + \alpha_2(e_2, e_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha_1 = -2, \\ 2\alpha_2 = -4 \end{cases} \iff \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2.$$

Таким образом, вектор $g = -e_1 - 2e_2 = (0, 2, 1, -2, -1)$ является ортогональной проекцией вектора f на подпространство L.

Итак, ортогональная проекция многочлена $f(t)$ на указанное подпространство L – это многочлен $g(t) = 2t + t^2 - 2t^3 - t^4$. ▪

ЗАДАЧИ

Ортогональная сумма и ортогональное дополнение

49.1. Доказать, что ортогональная сумма подпространств является прямой суммой.

49.2. Доказать, что если сумма размерностей подпространств в ортогональной сумме $L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$ равна размерности всего пространства E, то $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$.

49.3. Доказать, что сумма L подпространств $L_1, \ldots, L_p$ является их ортогональной суммой тогда и только тогда, когда совокупность ортогональных базисов этих подпространств образует ортогональный базис L.

49.4. Пусть $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$. Доказать, что эта сумма будет ортогональной тогда и только тогда, когда для скалярного произведения любых векторов x и y из E, имеющих по подпространствам $L_1, \ldots, L_p$ разложения $x = x_1 + \ldots + x_p$ и $y = y_1 + \ldots + y_p$ соответственно, справедливо равенство

$$(x, y) = (x_1, y_1) + \ldots + (x_p, y_p).$$

49.5. Линейное пространство V разложено в прямую сумму подпространств: $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$. Доказать, что скалярное произведение в V можно определить таким образом, чтобы подпространства L_i в этом разложении были все попарно ортогональны.

49.6. Доказать, что если A и B – матрицы одного размера и $B^T A = O$, то $\operatorname{rg}(A \mid B) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

49.7. Доказать, что ортогональное дополнение в евклидовом (унитарном) пространстве E обладает следующими свойствами:

а) $(L^\perp)^\perp = L$; б) если $L_1 \subset L_2$, то $L_2^\perp \subset L_1^\perp$;

в) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$; г) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$;

д) $E^\perp = \{\theta\}$, $\{\theta\}^\perp = E$.

49.8. Пусть A и B – матрицы размера $m \times n$ и $k \times n$ соответственно, причем если $Ax = 0$ для некоторого столбца x, то и $Bx = 0$. Доказать, что $B = CA$, где C – матрица размера $k \times m$.

49.9. Подпространства L_1 и L_2 дают в прямой сумме все евклидово (унитарное) пространство E. Доказать, что этим же свойством обладают и их ортогональные дополнения, т.е.

$$E = L_1^\perp \oplus L_2^\perp.$$

49.10. Пусть L и L_1 – линейные подпространства евклидо-

ва (унитарного) пространства E, причем $L_1 \subset L$. Обозначим через $L_1^{\perp}$ ортогональное дополнение подпространства L_1 в E, через $\widetilde{L_1}^{\perp}$ – ортогональное дополнение L_1 в L. Показать, что $\widetilde{L_1}^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L$.

49.11. Пусть L_1 и L_2 – линейные подпространства евклидова (унитарного) пространства, причем $\dim L_1 < \dim L_2$. Доказать, что в L_2 найдется ненулевой вектор, ортогональный всем векторам из L_1.

49.12. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

а) $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $a_3 = (0, 1, -2, 1)$;

б) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (-1, 1, -1, 1)$, $a_3 = (2, 0, 2, 0)$;

в) $a_1 = (1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (3, 7, -1, 2)$, $a_3 = (2, 4, -1, 0)$.

49.13. В пространстве V комплексных арифметических векторов найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов $a_1 = (0, 1+2i, -i)$, $a_2 = (1, -1, 2-i)$ в двух случаях:

а) когда V – комплексное пространство со стандартным скалярным произведением;

б) когда V – вещественное пространство, а скалярное произведение задано равенством (47.5).

49.14. В арифметических пространствах $\mathbb{R}^4$ (для пунктов а) и б)) и $\mathbb{C}^3$ (для пункта в)) со стандартными скалярными произведениями найти системы уравнений, задающие ортогональные дополнения к подпространствам, описанным каждой из следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 - ix_3 = 0, \\ -ix_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$

49.15. Доказать, что системы линейных уравнений, задающие линейное подпространство L в пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением и его ортогональное дополнение

$L^\perp$, связаны следующим образом: коэффициенты уравнений системы, задающей одно из этих подпространств, являются координатами векторов, порождающих другое подпространство.

49.16. Найти системы линейных уравнений, описывающие подпространство L, заданное в задаче 49.12(в), и его ортогональное дополнение $L^\perp$.

49.17. В пространстве многочленов M_n скалярное произведение введено стандартным образом. Найти ортогональное дополнение подпространства:

а) многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$;

б) многочленов, удовлетворяющих условию $f(-1) = f(1)$;

в) многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) + f'(1) = 0$;

г) всех четных многочленов пространства M_n.

49.18. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональное дополнение к подпространству:

а) матриц с нулевым следом;

б) симметрических матриц;

в) кососимметрических матриц;

г) верхних треугольных матриц.

49.19. Квадратная матрица A порядка n такова, что для любой матрицы X порядка n с нулевым следом $\operatorname{tr} AX = 0$. Доказать, что A – скалярная матрица.

49.20. Квадратная матрица A порядка n такова, что для любой симметрической матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ выполнено соотношение $\operatorname{tr} AX = 0$.

1. Доказать, что A – кососимметрическая матрица.

2. Что можно сказать о квадратной матрице A, если соотношение $\operatorname{tr} AX = 0$ выполнено для любой кососимметрической матрицы X порядка n?

49.21. Ненулевая квадратная матрица A порядка n такова, что для любой стохастической матрицы X порядка n выполнено соотношение $\operatorname{tr} AX = \operatorname{tr} A$. Доказать, что ранг матрицы A равен единице.

49.22. Квадратная матрица A порядка n такова, что для любой дважды стохастической матрицы X порядка n выполнено соотношение $\operatorname{tr} AX = \operatorname{tr} A$. Доказать, что ранг матрицы A не превосходит двух.

49.23. Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов евклидова пространства E, заданных в

некотором ортонормированном базисе E координатными столбцами:

а) $(10,1,-7)^T$; б) $(1,1,1)^T$, $(1,-4,-1)^T$;
в) $(1,-5,2,-9)^T$; г) $(1,1,-5,1)^T$, $(2,-7,2,-1)^T$;
д) $(-1,3,0,1)^T$, $(4,2,1,1)^T$, $(3,5,1,2)^T$.

49.24. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки следующих систем векторов:

а) $a_1 = (1,2,1)$; б) $a_1 = (1,-1,1,-1)$;
в) $a_1 = (1,3,-1,1)$, $a_2 = (2,5,-2,3)$;
г) $a_1 = (1,2,-1,-3)$, $a_2 = (2,1,1,-9)$, $a_3 = (1,4,-3,-1)$;
д) $a_1 = (-1,0,1,2,1)$, $a_2 = (2,-3,1,-1,4)$, $a_3 = (-1,-1,2,3,3)$.

49.25. Найти базис ортогонального дополнения подпространства векторов, координаты $x_1,\ldots,x_n$ которых в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства удовлетворяют системе линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 10x_1 + x_2 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ 10x_1 + 19x_2 - x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

49.26. Найти систему линейных уравнений, описывающую ортогональное дополнение подпространства векторов, координаты $x_1,\ldots,x_n$ которых в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства удовлетворяют системе уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0;$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

49.27. Пусть $Ax = b$ – вещественная система m линейных уравнений с n неизвестными, $a'_1, \ldots, a'_m$ – строки, $a_1, \ldots, a_n$ – столбцы матрицы A. Будем рассматривать решение x системы и строки матрицы A как векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, а столбец правых частей b и столбцы матрицы A как векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ скалярные произведения введены стандартным образом. Обозначим через L и M линейные оболочки соответственно векторов $a'_1, \ldots, a'_m$ и $a_1, \ldots, a_n$. Показать, что:

1) множество всех решений однородной системы уравнений $Ax = 0$ совпадает с $L^\perp$;

2) множество всех решений сопряженной однородной системы уравнений $A^T y = 0$ есть $M^\perp$;

3) система уравнений $Ax = b$ разрешима тогда и только тогда, когда $b \in M$;

4) опираясь на предыдущие пункты, доказать *теорему Фредгольма*: система уравнений $Ax = b$ разрешима тогда и только тогда, когда столбец b ортогонален любому решению y сопряженной однородной системы;

5) доказать *альтернативу Фредгольма*: либо система уравнений $Ax = b$ разрешима при любой правой части b, либо сопряженная однородная система имеет нетривиальное решение.

49.28. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ – биортогональные базисы евклидова (унитарного) пространства и $L_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$, $k < n$. Доказать, что $L_k^\perp = \mathcal{L}(f_{k+1}, \ldots, f_n)$.

49.29. Доказать, что в любых двух подпространствах евклидова (унитарного) пространства можно выбрать ортонормированные базисы $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_l$ так, чтобы $(e_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(e_i, f_i) \geq 0$ для всех i.

Ортогональная проекция и перпендикуляр

В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, натянутое на векторы a_1, a_2, a_3.

49.30. $a_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $a_2 = (1, 4, 3, 2)$, $a_3 = (2, 2, -2, -2)$, $f = (14, -3, -6, -7)$.

49.31. $a_1 = (1, 3, 3, 5)$, $a_2 = (1, 3, -5, -3)$, $a_3 = (1, -5, 3, -3)$, $f = (2, -5, 3, 4)$.

49.32. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$, $f = (4, -1, -3, 4)$.

49.33. $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$, $f = (5, 2, -2, 2)$.

49.34. В пространстве $\mathbb{C}^3$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора $f = (0, -1+i, -1+6i)$ на подпространство L, натянутое на векторы $a_1 = (-i, 2+i, 0)$, $a_2 = (2, -3-i, i)$.

В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, заданное однородной системой уравнений.

49.35. $f = (-3, 0, -5, 9)$, $L: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

49.36. $f = (7, -4, -1, 2)$, $L: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

49.37. $f = (8, -2, 8, 3)$, $L: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

49.38. $f = (2, 3, -1, -2)$, $L: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

В пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, заданное однородной системой уравнений.

49.39. $f = (0, -7i, 7+7i)$, $L: x_1 + ix_2 - (2-i)x_3 = 0$.

49.40. $f = (4, -4, 4i)$, $L: x_1 + (1+i)x_2 - ix_3 = 0$.

49.41. $f = (3-i, 1+2i, 2, -i)$, $L: \begin{cases} (2+i)x_1 + x_2 + 2x_3 + ix_4 = 0, \\ 5x_1 - 2ix_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

В пространстве M_4 со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию и перпендикуляр, опущенный из многочлена $f(t)$ на подпространство L.

49.42. $f(t) = 1 + 5t^2 + 6t^3 + 8t^4$, $L: \{g'(1) = 0\}$.

49.43. $f(t) = 3 + 3t + 5t^2 + 3t^3 - t^4$, $L: \{g(-1) = g(1) = g(2)\}$.

49.44. $f(t) = 2 + 4t^2 - 7t^4$, $L: \{2g(-1) - g'(-1) = 0,$
$g(0) = 0, 2g(1) + g'(1) = 0\}$.

49.45. Найти ортогональную проекцию $g(t)$ многочлена $1 + t + t^2 + t^3$ на линейное подпространство M_1 многочленов степени не выше первой, если скалярное произведение в M_3 задано:

а) стандартным образом равенством (47.8);

б) равенством (47.9), в котором $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

в) равенством (47.14), в котором $a = 1$;

г) равенством (47.15), в котором $m = 4$.

49.46. Доказать, что если в процессе ортогонализации система векторов $a_1, \ldots, a_n$ переходит в систему $b_1, \ldots, b_n$, то вектор b_k есть перпендикуляр, опущенный из вектора a_k на линейную оболочку системы $a_1, \ldots, a_{k-1}$ $(k > 1)$.

49.47. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ – ортогональный базис линейного подпространства L евклидова (унитарного) пространства E, f – произвольный вектор из E, а g – его ортогональная проекция на L. Доказать, что:

1) $g = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{|(f, e_k)|^2}{(e_k, e_k)} \leq |f|^2$ (*неравенство Бесселя*);

3) *равенство Парсеваля* $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{|(f, e_k)|^2}{(e_k, e_k)} = |f|^2$ справедливо для всех векторов f из E тогда и только тогда, когда $L = E$.

49.48. Доказать, что если система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_m$ такова, что равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{|(f, a_k)|^2}{(a_k, a_k)} = |f|^2$ выполнено для всех векторов $f \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_m)$, то система $a_1, \ldots, a_m$ ортогональна.

49.49. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства E и $G = G(a_1, \ldots, a_m)$ – ее матрица Грама. Обозначим через $G^{-1} = (\gamma_{ik})$ обратную к G матрицу. Тогда для всех векторов $f \in E$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{m} \gamma_{ik}(f, a_i)(a_k, f) \leq (f, f).$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_m)$.

49.50. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства E и $G = G(a_1, \ldots, a_m)$ – ее матрица Грама. Обозначим через $G^{-1} = (\gamma_{ik})$ обратную к G матрицу. Доказать, что система векторов $a_1, \ldots, a_m$ образует базис E тогда и только тогда, когда для любого вектора $f \in E$ выполнено равенство

$$\sum_{i,k=1}^{m} \gamma_{ik}(f, a_i)(a_k, f) = (f, f).$$

49.51. Пусть L – линейное подпространство евклидова пространства E, $f_1, \ldots, f_m$ – базис в L и $G = G(f_1, \ldots, f_m)$ – его матрица Грама. Пусть для вектора $f \in L$ вектор g является его ортогональной проекцией на L, вектор h – ортогональной составляющей. Доказать, что:

1) $|h|^2 = \dfrac{\det G(f_1, \ldots, f_m, f)}{\det G}$;

2) $|g|^2 = -\dfrac{1}{\det G} \det \begin{bmatrix} G & c^T \\ c & 0 \end{bmatrix}$, где c – строка из скалярных произведений $(f, f_1), \ldots, (f, f_m)$.

49.52. Доказать следующие свойства определителя матрицы Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_m$ евклидова (унитарного) пространства:

1) $\det G(f_1, \ldots, f_m) \leq |f_1|^2 \cdot \ldots \cdot |f_m|^2$;

2) равенство $\det G(f_1, \ldots, f_m) = |f_1|^2 \cdot \ldots \cdot |f_m|^2$ справедливо тогда и только тогда, когда либо векторы $f_1, \ldots, f_m$ образуют ортогональную систему, либо хотя бы один из этих векторов нулевой.

49.53. Используя предыдущую задачу, доказать для определителя матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ следующие утверждения:

1) $|\det A|^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)$ (*неравенство Адамара*);

2) равенство $|\det A|^2 = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)$ справедливо тогда и

только тогда, когда либо $A^H A$ является диагональной матрицей, либо один из столбцов матрицы A нулевой.

49.54. Пусть L_1 и L_2 – линейные подпространства евклидова (унитарного) пространства E такие, что $L_1 \subset L_2$, и пусть g_1 и g_2 – ортогональные проекции вектора $f \in E$ на L_1 и L_2, а h_1 и h_2 – перпендикуляры, опущенные из вектора f на L_1 и L_2 соответственно. Доказать, что $|g_1| \leq |g_2|$, $|h_1| \geq |h_2|$.

49.55. Доказать следующие свойства определителя матрицы Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_k$, $g_1, \ldots, g_l$ евклидова (унитарного) пространства:

1) для любых $k, l > 0$ выполнено неравенство

$$\det G(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l) \leq \det G(f_1, \ldots, f_k) \det G(g_1, \ldots, g_l);$$

2) равенство

$$\det G(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l) = \det G(f_1, \ldots, f_k) \det G(g_1, \ldots, g_l)$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо линейные оболочки систем векторов $f_1, \ldots, f_k$ и $g_1, \ldots, g_l$ ортогональны, либо одна из этих систем линейно зависима.

§50. Метрические задачи

Множество M называется *метрическим пространством*, если задано отображение

$$\rho : M \times M \to \mathbb{R},$$

которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$ такое, что:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$,
$\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in M$;
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $\forall x, y, z \in M$.

Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием между x и y*; отображение ρ – *метрикой*, аксиомы 1–3 – *аксиомами метрики (расстояния)*.

Расстоянием между множествами X и Y в метрическом пространстве называется число

$$\rho(X, Y) = \inf_{x \in X,\, y \in Y} \rho(x, y).$$

Теорема 50.1. *В евклидовом (унитарном) пространстве V правило*

$$\rho(x, y) = |x - y| \tag{50.1}$$

задает метрику.

В дальнейшем, говоря об евклидовом (унитарном) пространстве как о метрическом, будем иметь в виду именно эту метрику.

Теорема 50.2 (о кратчайшем расстоянии). *Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном)*

пространстве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L или, в других терминах:

1) *расстояние между вектором f и подпространством L равно расстоянию между вектором f и его ортогональной проекцией на L;*

2) *среди всех векторов подпространства L ближе всего к вектору f расположена его ортогональная проекция на L.*

Пример 50.1. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти расстояние от вектора $f = (7, -3, 1, -1)$ до линейного подпространства L, натянутого на векторы

$$a_1 = (1, 1, 1, 1),\ a_2 = (2, -1, 3, 2),\ a_3 = (1, 0, -1, 1).$$

Решение. Так как

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_1 - a_3 \\ a_1 + a_2 - 3a_3 \end{matrix}$$

то $\dim L = 3$ и векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис L. Следовательно, $\dim L^\perp = 1$ и будем искать разложение $f = g + h$ вектора f на ортогональную проекцию g и перпендикуляр h в виде

$$f = g + \alpha e_1, \tag{50.2}$$

где e_1 – базис ортогонального дополнения $L^\perp$. Как следует из примера 49.1, вектор e_1 является фундаментальной системой решений системы с расширенной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда $e_1 = (-1, 0, 0, 1)$.

Из равенства (50.2) получим

$$(f, e_1) = \alpha(e_1, e_1) \iff \alpha = -4.$$

Поэтому $h = -4e_1 = (4, 0, 0, -4)$ и $\rho(f, L) = |h| = 4\sqrt{2}$. ▪

Пример 50.2. В пространстве многочленов M_3 со стандартным скалярным произведением найти расстояние от многочлена $f(t) = 4 + t + 3t^3$ до линейного подпространства L всех четных многочленов, обращающихся в нуль при $t = 1$.

Решение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ принадлежит подпространству L тогда и только тогда, когда $a_1 = a_3 = 0$, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Тем самым, L – одномерное подпространство, натянутое на многочлен $e_1(t) = 1 - t^2$. Разложение $f(t) = g(t) + h(t)$ многочлена на ортогональную проекцию $g(t)$ и перпендикуляр $h(t)$ будем искать в виде

$$f(t) = \alpha_1 e_1(t) + h(t).$$

Отсюда $(f, e_1) = \alpha_1(e_1, e_1) \iff \alpha_1 = 2$. Поэтому $h(t) = f(t) - 2e_1(t) = 2 + t + 2t^2 + 3t^3$, и следовательно, $\rho(f, L) = |h| = 3\sqrt{2}$. ▪

Упорядоченная тройка векторов x, y, $x - y$ произвольного евклидова (унитарного) пространства называется *треугольником, натянутым на векторы x и y.*

Точно также упорядоченная пара векторов x, y произвольного евклидова (унитарного) пространства называется *параллелограммом, натянутым на векторы x и y с диагоналями $x + y$ и $x - y$.*

Упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_n$ n-мерного евклидова (унитарного) пространства называется *n-мерным параллелепипедом, натянутым на векторы* $x_1, \ldots, x_n$. В частности, параллелограмм, натянутый на пару линейно независимых векторов, является двумерным параллелепипедом.

Объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1, \ldots, x_n$ евклидова пространства, определяется по индукции:

1) $V(x_1) = |x_1|$;

2) $V(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot |h_n|$, где h_n – ортогональная составляющая вектора x_n относительно подпространства, натянутого на векторы $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

В евклидовом пространстве *углом* между ненулевыми векторами x и y называется угол φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

В евклидовом пространстве *углом между ненулевым вектором x и ненулевым подпространством L* называется точная нижняя грань значений угла, который образует вектор x с ненулевыми векторами из L.

Углом между ненулевыми линейными подпространствами L_1 и L_2 евклидова пространства, не имеющими общих ненулевых векторов, называется точная нижняя грань значений угла между ненулевыми векторами $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$. Если $L_1 \cap L_2 = D \neq \{\theta\}$ и $D \neq L_1$, $D \neq L_2$, то углом между L_1 и L_2 называется угол между ортогональными дополнениями $D_1^{\perp}$ и $D_2^{\perp}$ подпространства D в подпространствах L_1 и L_2 соответственно. Если одно из подпространств L_1 и L_2 содержится в другом, то угол между ними считается равным нулю.

Пример 50.3. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между подпространствами $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2)$, где $a_1 = (1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (2, 2, -2, 2)$, и L_2, описанным системой $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Решение. Заметим, что $\dim L_1 = 1$, $\dim L_2 = 2$ и $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Так как косинусы углов, которые образуют векторы из L_1 с подпространством L_2 отличаются только знаком (см. задачу 50.14, пункт 3), то точная нижняя грань этих углов совпадает с углом между вектором a_1 и подпространством L_2, который, в свою очередь, равен углу между вектором a_1 и проекцией a_1 на подпространство L_2 (см. задачу 50.14, пункт 1). Найдем эту проекцию.

Имеем: $a_1 = g + h$, $g \in L_2$, $h \in L_2^{\perp}$ или $a_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + h$, где $e_1 = (1, 0, -1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 0, 1)$ – базис L_2. Умножая почленно обе части последнего равенства на e_1 и на e_2, получим систему уравнений относительно α_1, α_2: $2\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. Отсюда следует, что $g = e_1 + e_2 = (1, 0, -1, 1)$.

Следовательно, если φ – угол между a_1 и g (т.е. искомый угол), то $\cos\varphi = \sqrt{3}/2$ и $\varphi = \pi/6$. ▪

Пример 50.4. В пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением найти угол между подпространствами $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1, b_2, b_3)$, где $a_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $b_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $b_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$, $b_3 = a_3$.

Решение. Заметим, что $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 3$, $L = L_1 \cap L_2 = \mathcal{L}(a_3)$, $\dim L = 1$. Согласно определению $\varphi(L_1, L_2) = \varphi(\widetilde{L_1}, \widetilde{L_2})$, где $\widetilde{L_1}$ – ортогональное дополнение L до L_1, $\widetilde{L_2}$ – ортогональное дополнение L до L_2. Имеем:

$\widetilde{L_1} = \mathcal{L}(a_1, a_2)$, $\widetilde{L_2} = \mathcal{L}(b_1, b_2)$, при этом $\dim \widetilde{L_1} = \dim \widetilde{L_2} = 2$, $\widetilde{L_1} \cap \widetilde{L_2} = \{\theta\}$. Этот случай рассмотрен в примере 50.4. Впрочем можно не прибегать к вычислениям, описанным в этом примере, так как $\widetilde{L_1} \perp \widetilde{L_2}$, и потому искомый угол $\varphi = \pi/2$. ▪

Общий случай нахождения угла между подпространствами L_1 и L_2, имеющими тривиальное пересечение и размерности которых больше 1, поясним на примере 50.5.

Пример 50.5. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между подпространствами $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2)$, где $a_1 = (1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (0, 0, -1, 1)$, и L_2, описанным системой $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Решение. Итак, $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 2$, $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Обозначим через $\varphi(x_1, x_2)$ и $\varphi(L_1, L_2)$ угол между векторами x_1, x_2 и угол между подпространствами L_1 и L_2 соответственно. Тогда, согласно определению угла между подпространствами с нулевым пересечением, имеем

$$\varphi(L_1, L_2) = \inf_{\substack{x_1 \in L_1, x_1 \neq \theta \\ x_2 \in L_2, x_2 \neq \theta}} \varphi(x_1, x_2),$$

откуда

$$\cos\varphi(L_1, L_2) = \sup_{\substack{x_1 \in L_1, x_1 \neq \theta \\ x_2 \in L_2, x_2 \neq \theta}} \cos\varphi(x_1, x_2) = \sup_{\substack{x_1 \in L_1, x_1 \neq \theta \\ x_2 \in L_2, x_2 \neq \theta}} \frac{(x_1, x_2)}{|x_1| \cdot |x_2|} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1 \in L_1, |x_1| = 1 \\ x_2 \in L_2, |x_2| = 1}} (x_1, x_2).$$

Первый способ нахождения угла между подпространствами основан на следующем соотношении, вытекающем из последнего равенства:

$$\cos\varphi(L_1, L_2) = \sup_{x_2 \in L_2, x_2 \neq \theta} \left(\sup_{x_1 \in L_1, x_1 \neq \theta} \frac{(x_1, x_2)}{|x_1| \cdot |x_2|} \right).$$

Для каждого фиксированного ненулевого вектора $x_2 \in L_2$ величина в круглых скобках равна косинусу угла между одномерным подпространством $\mathcal{L}(x_2)$ и подпространством L_1, а он, в свою очередь, равен косинусу угла между вектором x_2 и его ортогональной проекцией g_2 на L_1 (в случае, когда $g_2 = \theta$, будем считать, что косинус этого угла равен нулю). Следовательно,

$$\cos\varphi(L_1, L_2) = \sup_{x_2 \in L_2, x_2 \neq \theta} \cos\varphi(x_2, g_2), \quad g_2 = \mathrm{pr}_{L_1} x_2.$$

Итак, рассмотрим произвольный ненулевой вектор $x_2 \in L_2$. Тогда $x_2 = (\alpha, 0, -\alpha, \beta)$, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Выберем в L_2 ортогональный базис $b_1 = a_1 - a_2 = (1, 1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, -1, 1)$. Найдем ортогональную проекцию g_2 вектора x_2 на L_1:

$$x_2 = g + h = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + h \iff \begin{cases} (x_2, b_1) = \lambda_1 (b_1, b_1) + \lambda_2 (b_2, b_1), \\ (x_2, b_2) = \lambda_1 (b_1, b_2) + \lambda_2 (b_2, b_2) \end{cases} \iff$$

$$\iff \lambda_1 = \alpha/2, \lambda_2 = (\alpha + \beta)/2.$$

Таким образом, $g_2 = (\alpha/2, \alpha/2, -(\alpha + \beta)/2, (\alpha + \beta)/2)$ и

$$\cos\varphi(L_1, L_2) = \sup_{\alpha^2 + \beta^2 \neq 0} \frac{(x_2, g_2)}{|x_2| \cdot |g_2|}.$$

Имеем

$$\frac{(x_2,g_2)}{|x_2|\cdot|g_2|}=\frac{\alpha^2+(\alpha+\beta)^2}{\sqrt{2\alpha^2+\beta^2}\sqrt{2\alpha^2+2(\alpha+\beta)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\alpha^2+(\alpha+\beta)^2}{2\alpha^2+\beta^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{2\alpha\beta}{2\alpha^2+\beta^2}}.$$

Очевидно, последнее выражение достаточно исследовать лишь для положительных значений α и β, поэтому:

$$\frac{2\alpha\beta}{2\alpha^2+\beta^2}=\frac{2}{2(\alpha/\beta)+(\beta/\alpha)}\le\frac{1}{\sqrt{2}},$$

причем максимальное значение $1/\sqrt{2}$ достигается при $\beta/\alpha=\sqrt{2}$.

Тем самым, окончательно получим

$$\cos\varphi(L_1,L_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Второй способ основан на следующем факте (см. задачу 49.29): *в любой паре подпространств L_1 и L_2 можно выбрать ортонормированные базисы $e_1,\dots,e_k$ в L_1 и $f_1,\dots,f_l$ в L_2 так, чтобы $(e_i,f_j)=0$ при $i\ne j$ и $(e_i,f_i)\ge 0$ для всех возможных i.*

Учитывая этот факт, рассмотрим произвольные единичные векторы $x_1=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ke_k\in L_1$ и $x_2=\beta_1f_1+\dots+\beta_lf_l\in L_2$. Тогда $\alpha_1^2+\dots+\alpha_k^2=\beta_1^2+\dots+\beta_l^2=1$ и $(x_1,x_2)=\alpha_1\beta_1(e_1,f_1)+\dots+\alpha_m\beta_m(e_m,f_m)$, где $m=\min(k,l)$. Так как $(e_i,f_i)\ge 0$ при $i=\overline{1,m}$, то

$$\alpha_1\beta_1(e_1,f_1)+\dots+\alpha_m\beta_m(e_m,f_m)\le\max_{1\le i\le m}(e_i,f_i)\cdot(\alpha_1\beta_1+\dots+\alpha_m\beta_m)\le$$

$$\le\max_{1\le i\le m}(e_i,f_i)$$

в силу неравенства Коши–Буняковского для сумм. Так как для $i=i_0$: $(e_{i_0},f_{i_0})=\max\limits_{1\le i\le m}(e_i,f_i)$ и для $\alpha_{i_0}=\beta_{i_0}=1$, $\alpha_i=\beta_i=0$ $\forall i\ne i_0$ все неравенства переходят в равенства, то окончательно получим

$$\cos\varphi(L_1,L_2)=\max_{1\le i\le m}(e_i,f_i).$$

Построим требуемую пару базисов в рассматриваемом примере 50.5.

Рассмотрим вектор $c_1=(1,0,-1,k)\in L_2$. Тогда вектор $b_2=(1+k,1+k,1,-1)$ принадлежит L_1 и $(c_1,b_2)=0$.

Найдем вектор $b_1\in L_1$, ортогональный b_2, и вектор $c_2\in L_2$, ортогональный c_1:

$$b_1=(1,1,-1-k,1+k),\quad c_2=(1,0,-1,-2/k),$$

и выберем k таким, чтобы векторы b_1 и c_2 были ортогональны:

$$2+k-2(1+k)/k=0\iff k=\sqrt{2}.$$

Таким образом, получим ортогональный базис L_1: $b_1=(1,1,-1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$, $b_2=(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2},1,-1)$ и ортогональный базис L_2: $c_1=(1,0,-1,\sqrt{2})$, $c_2=(1,0,-1,-\sqrt{2})$, которые, кроме того, в совокупности образуют ортогональную систему. Следовательно, векторы

$$e_1=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}b_1,\ e_2=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}b_2,\ f_1=\frac{1}{2}c_1,\ f_2=\frac{1}{2}c_2$$

удовлетворяют всем условиям сформулированного выше утверждения и

$$\cos\varphi(L_1, L_2) = \max\big((e_1, f_1), (e_2, f_2)\big).$$

Имеем: $(e_1, f_1) = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2$, $(e_2, f_2) = \sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, поэтому косинус угла $\varphi(L_1, L_2)$ равен $\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$. ∎

ЗАДАЧИ

Угол между векторами, длина вектора

50.1. Найти угол между векторами a и b в пространстве:

1) $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением, если:

а) $a = (2, -3, 1)$, $b = (4, -6, 2)$; б) $a = (1, -1, 2)$, $b = (1, 0, 1)$;

в) $a = (1, 0, -1)$, $b = (-1, 2, 2)$;

2) $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, если:

а) $a = (1, -1, 1, -1)$, $b = (-1, 1, -1, 1)$;

б) $a = (-1, 2, 3, -4)$, $b = (5, 0, -2, 1)$;

в) $a = (1, 2, 2, 1)$, $b = (1, 1, 1, 2)$;

3) $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$, если:

а) $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$; б) $a = (1, 0)$, $b = (-1, 1)$;

4) $\mathbb{R}^3$ со скалярным произведением $(x, y) = x \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} y^T$, если:

а) $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$; б) $a = (-1, 0, 0)$, $b = (-1, 2, 2)$.

50.2. Как изменится угол между ненулевыми векторами x и y, если:

а) умножить вектор x на положительное число;

б) умножить вектор x на отрицательное число;

в) умножить оба вектора x и y на отрицательные числа?

50.3. Доказать, что треугольники, натянутые соответственно на векторы x, y и αx, αy, где α – произвольное ненулевое число, имеют одинаковые углы.

50.4. В треугольнике, натянутом на векторы:

а) $x = (2, -1, 3, -2)$ и $y = (3, 1, 5, 1)$;

б) $x = (4, 0, 2, 0, 4)$ и $y = (3, 3, 3, 3, 0)$

в арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением, найти длины сторон. Определить углы между сторонами треугольника – векторами x, y, $x-y$. Какие из этих углов естественно считать внутренними углами треугольника, а какие – внешними?

50.5. Доказать, что в евклидовом пространстве:

1) сумма внутренних углов любого треугольника равна π;

2) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон;

3) квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов);

4) длины сторон треугольника пропорциональны синусам противоположных внутренних углов (теорема синусов).

50.6. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ – система попарно ортогональных векторов евклидова или унитарного пространства. Доказать, что $|f_1 + \ldots + f_k|^2 = |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2$ (обобщение теоремы Пифагора).

50.7. Доказать, что в евклидовом пространстве верна теорема, обратная теореме Пифагора: если $|f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$, то векторы f_1 и f_2 ортогональны. Справедливо ли это утверждение в унитарном пространстве?

50.8. Доказать, что векторы x и y унитарного пространства ортогональны тогда и только тогда, когда равенство $|\alpha x + \beta y|^2 = |\alpha x|^2 + |\beta y|^2$ выполнено для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

50.9. Доказать, что в евклидовом пространстве равенство $|x + y| = |x - y|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y ортогональны. Каков геометрический смысл этого утверждения?

50.9.1. Показать, что в унитарном пространстве утверждение предыдущей задачи уже неверно. Для каких векторов x и y имеет место равенство $|x + y| = |x - y|$?

50.9.2. Доказать, что в унитарном пространстве векторы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда равенство $|x + \alpha y| = |x - \alpha y|$ имеет место для любого $\alpha \in \mathbb{C}$.

50.10. В n-мерном евклидовом пространстве E заданы векторы $e_1, \ldots, e_{n+1}$, попарно образующие тупые углы. Доказать, что любые n из этих векторов образуют базис E.

50.11. Доказать, что в n-мерном евклидовом пространстве $n + 2$ вектора не могут попарно образовывать тупые углы.

50.12. Доказать, что в n-мерном евклидовом пространстве не существует системы, состоящей из $n+1$ векторов и в которой все векторы попарно образуют один и тот же острый угол φ_0.

Угол между вектором и подпространством

50.13. Может ли угол между вектором и линейным подпространством быть больше, чем $\pi/2$?

50.14. Пусть f – ненулевой вектор евклидова пространства E, L – линейное подпространство E, φ – угол между f и L, g – ортогональная проекция вектора f на L. Доказать, что:

1) если $g = \theta$, то $\varphi = \pi/2$;

2) если $g \neq \theta$, то угол φ равен углу между векторами f и g;

3) если $g \neq \theta$, то для всякого вектора $y \in L$, образующего угол φ с вектором f, имеет место равенство $y = \alpha g$, где $\alpha > 0$.

50.15. Доказать, что в евклидовом пространстве углы, которые вектор f образует с произвольным подпространством L и его ортогональным дополнением $L^{\perp}$, в сумме равны $\pi/2$.

50.16. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства, x – произвольный нормированный вектор. Доказать, что координаты вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$ равны косинусам углов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, которые x образует с базисными векторами. Вывести отсюда соотношение:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1.$$

50.17. Евклидово пространство E разложено в ортогональную сумму подпространств $L_1, \ldots, L_p$. Доказать, что для углов $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, которые произвольный вектор f образует с подпространствами $L_1, \ldots, L_p$, справедливо соотношение

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_p = 1.$$

50.18. Подпространство L есть ортогональная сумма подпространств L_1 и L_2. Вектор f ортогонален подпространству L_1. Доказать, что угол между f и L равен углу между f и L_2.

В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между вектором f и линейным подпространством L, натянутым на векторы a_1, a_2, a_3.

50.19. $a_1 = (2, 3, -4, -6)$, $a_2 = (-1, -8, 2, 16)$, $a_3 = (3, -2, -6, 4)$, $f = (-3, 15, 1, -5)$.

50.20. $a_1 = (2, -1, 2, 1)$, $a_2 = (-1, 2, -2, 1)$, $a_3 = (-1, 1, -1, 0)$, $f = (3, 1, \sqrt{2}, -2)$.

50.21. $a_1 = (3, 4, -4, -1)$, $a_2 = (0, 1, -1, 2)$, $a_3 = (3, 5, -5, 1)$, $f = (2, 2, 1, 1)$.

50.22. $a_1 = (5, 3, 4, -3)$, $a_2 = (1, 1, 4, 5)$, $a_3 = (2, -1, 1, 2)$, $f = (1, 0, 3, 0)$.

В евклидовом пространстве E выбран некоторый ортонормированный базис e. Найти угол между вектором f, заданным координатным столбцом в этом базисе, и подпространством L, описанным в базисе e однородной системой уравнений.

50.23. $f_e = (1,-2,1)^T$, $L:\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$.

50.24. $f_e = (1,0,0,0)^T$, $L:\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

50.25. $f_e = (3,1,-1,-1)^T$, $L: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

50.26. $f_e = (0,2,1,1)^T$, $L: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

50.27. В пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением линейное подпространство L описано системой $Ax = 0$ с некоторой матрицей $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Найти угол между вектором $(c_1,\dots,c_n)$ и подпространством L, если $c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$.

Расстояние от вектора до подпространства

В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти расстояние от вектора f до подпространства L, натянутого на векторы $a_1,\dots,a_k$.

50.28. $a_1 = (4,3,2,1)$, $f = (1,-1,1,-1)$.

50.29. $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (4,0,5)$, $f = (7,-3,-1)$.

50.30. $a_1 = (1,-1,1,0)$, $a_2 = (2,-1,0,1)$, $f = (1,0,2,-2)$.

50.31. $a_1 = (-2,0,1,1)$, $a_2 = (1,-1,1,-1)$, $a_3 = (1,1,-1,-1)$, $f = (1,2,0,-1)$.

50.32. $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (5,1,1,3)$, $a_3 = (3,-1,1,0)$, $f = (5,4,-3,-2)$.

В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти расстояние от вектора f до подпространства L, заданного однородной системой уравнений.

50.33. $f = (1,-2,3,-4)$, $L:\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

50.34. $f = (8,-2,8,3)$, $L: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

50.35. $f = (2,3,-1,-2)$, $L: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

50.36. $f = (0, 1, -2, 3)$, $L: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

50.37. Доказать, что квадрат расстояния от вектора f евклидова пространства до подпространства L, натянутого на линейно независимую систему векторов $f_1, \ldots, f_k$, равен отношению определителей Грама систем $f_1, \ldots, f_k, f$ и $f_1, \ldots, f_k$.

50.38. Пусть L – линейное подпространство и f – некоторый вектор евклидова (унитарного) пространства. Доказать, что наименьшее значение величины $|f - g|$ среди всех векторов $g \in L$ достигается на единственном векторе, являющемся ортогональной проекцией вектора f на подпространство L, и оно равно длине перпендикуляра, опущенного из f на L.

50.39. В пространстве многочленов M_n скалярное произведение введено стандартным образом. Для заданных многочленов:

$$f_1(t) = 3t^2 + 2t + 1, \quad f_2(t) = -t^2 + 2t + 1,$$
$$f_3(t) = 3t^2 + 2t + 5, \quad f_4(t) = 3t^2 + t + 2$$

а) найти многочлен $f_0(t)$ степени не выше 2, равноудаленный от $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$;

б) определить расстояние между $f_0(t)$ и каждым из многочленов $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$;

в) доказать, что всякий многочлен вида

$$f_0(t) + \alpha_3 t^3 + \ldots + \alpha_n t^n$$

равноудален от $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, и определить расстояние от него до этих многочленов.

50.39.1. Пусть векторы a_1, a_2, a_3 евклидова (унитарного) пространства V таковы, что $a_2 - a_1$ и $a_3 - a_1$ неколлинеарны. Рассмотрим задачу о нахождении вектора $f \in V$, равноудаленного от векторов a_1, a_2 и a_3.

1. Доказать, что эта задача всегда имеет решение.

2. Показать, что если V – двумерное евклидово пространство, то это решение единственно.

3. Показать, что если V – двумерное унитарное пространство, то это решение находится неоднозначно.

4. Доказать, что если $\dim V \geq 3$, то для любого вектора h, ортогонального линейной оболочке $\mathcal{L}(a_1, a_2)$, вектор $f + h$ также является решением этой задачи.

50.39.2. Пусть векторы $a_0, a_1, \ldots, a_k$ евклидова (унитарного)

пространства V таковы, что $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$ линейно независимы. Доказать, что найдется вектор $f \in V$, равноудаленный от векторов $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Показать, что этот вектор f единствен тогда и только тогда, когда $\dim V = k$ и V – евклидово (но не унитарное) пространство.

50.40. Доказать, что в евклидовом пространстве E для любого подпространства L и любого вектора $x \in E$ выполнено равенство

$$\rho(x + y, L) = \rho(x, L),$$

где y – произвольный вектор подпространства L.

50.41. Подпространство L является ортогональной суммой подпространств L_1 и L_2. Доказать, что если вектор x ортогонален подпространству L_1, то

$$\rho(x, L) = \rho(x, L_2).$$

50.42. Пусть a – фиксированный вектор евклидова пространства, L – подпространство всех векторов, ортогональных a. Доказать, что для произвольного вектора x расстояние до подпространства L можно вычислить по формуле

$$\rho(x, L) = \frac{|(x, a)|}{|a|}.$$

50.43. В пространстве многочленов M_n скалярное произведение введено стандартным образом. Найти расстояние между подпространством M_{n-1} и

а) многочленом t^n;

б) многочленом $t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$;

в) многочленом $\alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$.

50.44. В пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением рассматривается подпространство L всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$. Доказать, что расстояние от произвольного многочлена $g(t)$ до подпространства L равно

$$\rho(g, L) = \frac{|g(1)|}{\sqrt{n+1}}.$$

50.44.1. Пусть n нечетно, и в пространстве M_n со стандартным скалярным произведением рассматривается подпространство L всех многочленов, удовлетворяющих условиям $f(1) = f(-1) = 0$. Доказать, что расстояние от произвольного многочлена $g(t)$ до подпространства L равно

$$\rho(g, L) = \sqrt{\frac{g^2(1) + g^2(-1)}{n+1}}.$$

50.44.2. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением рассматривается подпространство L всех матриц с нулевым следом. Доказать, что расстояние от произвольной матрицы A до подпространства L равно

$$\rho(A, L) = \frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{n}}.$$

Угол между подпространствами

50.45. Показать, что угол между любыми линейными подпространствами всегда определен и равен нулю тогда и только тогда, когда одно из этих подпространств содержится в другом.

50.45.1. Доказать, что в подпространствах L_1 и L_2, имеющих ненулевое пересечение L, найдутся векторы $x_1 \in L_1 \setminus L$ и $x_2 \in L_2 \setminus L$, угол между которыми сколь угодно мал.

50.46. Найти угол между подпространствами векторов x евклидова пространства, удовлетворяющими условию $(x, a_1) = 0$ и $(x, a_2) = 0$ соответственно, где a_1, a_2 – заданные ненулевые векторы.

50.47. Подпространства L_1 и L_2 являются линейными оболочками систем векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства координатными столбцами $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$. Найти угол между подпространствами L_1 и L_2, если:

1) $a_1 = (0, 3, -1, 0)^T$, $a_2 = (1, -2, 1, 1)^T$,
   $b_1 = (0, 0, 1, -3)^T$, $b_2 = (1, 1, 0, 1)^T$;
2) $a_1 = (1, 1, 2, 0)^T$, $a_2 = (2, 0, -1, -1)^T$,
   $b_1 = (1, 1, 0, -2)^T$, $b_2 = (1, 1, -3, 1)^T$;
3) $a_1 = (1, 2, 0, 1)^T$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)^T$,
   $b_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $b_2 = (1, 1, 2, 0)^T$, $b_3 = (1, 0, 1, -1)$;
4) $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $a_2 = (1, 0, 1, 2)^T$, $a_3 = (0, 1, 0, -1)^T$,
   $b_1 = (1, 1, 0, 0)^T$, $b_2 = (1, 0, 0, 1)^T$, $b_3 = (0, 1, 1, 0)$.

50.48. В пространстве M_n рассматриваются одномерные подпространства L_0, $L_1, \ldots, L_n$, натянутые на многочлены 1, $t, \ldots$, t^n соответственно. Для каждого $k = \overline{1, n}$ найти угол между подпространствами L_{k-1} и L_k, если:

а) скалярное произведение в M_n введено стандартным образом;

б) скалярное произведение в M_n введено равенством (47.9), в котором $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

50.49. В пространстве M_n со стандартным скалярным произведением найти угол между подпространствами:

а) $L_1 = \{f(t) \mid f(1) = 0\}$ и $L_2 = \{f(t) \mid f'(1) = 0\}$;

б) $L_1 = \{f(t) \mid f(1) = 0\}$ и $L_2 = \{f(t) \mid f(2) = 0\}$;

в) $L_1 = \{f(t) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ и $L_2 = \{f(t) \mid f'(0) = 0\}$;

г) $L_1 = \{f(t) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ и $L_2 = \{f(t) \mid f(1) = 0\}$.

Объем n-мерного параллелепипеда

50.50. Доказать, что объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_n$, может быть вычислен по формуле

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\det G(a_1, \ldots, a_n)} = |\det A|,$$

где $G(a_1, \ldots, a_n)$ – матрица Грама векторов $a_1, \ldots, a_n$, а A – матрица, строками которой являются координаты рассматриваемых векторов в каком-нибудь ортонормированном базисе n-мерного подпространства, натянутого на векторы $a_1, \ldots, a_n$.

50.51. В пространстве многочленов M_n со скалярным произведением (47.9) с $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$, найти:

а) объем параллелепипеда, натянутого на многочлены 1, t, $t^2, \ldots, t^n$;

б) наименьшее значение интеграла

$$\int_{-1}^{1} (t^n - f(t))^2 \, dt$$

на множестве всех многочленов $f(t)$ степени не выше $n - 1$.

50.52. Доказать, что объем n-мерного параллелепипеда не превосходит произведения длин его ребер, выходящих из одной вершины:

$$V(a_1, \ldots, a_n) \leq \prod_{i=1}^{n} |a_i|,$$

и равен этому произведению тогда и только тогда, когда эти ребра попарно ортогональны, т.е. параллелепипед прямоугольный.

50.53. Доказать, что объем параллелепипеда удовлетворяет

неравенству:

$$V(a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_l)\le V(a_1,\dots,a_k)V(b_1,\dots,b_l),$$

причем знак равенства в нем имеет место тогда и только тогда, когда линейные подпространства, натянутые на векторы $a_1,\dots,a_k$ и $b_1,\dots,b_l$, ортогональны.

50.54. Доказать, что если $a_1,\dots,a_n$ – нормированная система векторов и $V(a_1,\dots,a_n)=1$, то эта система ортонормирована.

50.55. Доказать, что среди всех параллелепипедов, натянутых на нормированную систему, параллелепипед, натянутый на ортонормированную систему, имеет максимальный объем.

§51. Линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве

Пусть $H=x_0+L$ – линейное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Вектор $n\in H$, ортогональный L, называется *нормальным вектором линейного многообразия* H.

Теорема 51.1. *Для любого линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве существует, и притом единственный, нормальный вектор.*

Теорема 51.2. *Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из любого вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.*

Следствие. Среди всех векторов линейного многообразия нормальный вектор имеет наименьшую длину.

Пример 51.1. Найти нормальный вектор линейного многообразия $H=a_0+L$, если $a_0=(-1,0,0,3)$, а L натянуто на векторы $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,0,2,-1)$. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^4$ задано стандартным образом.

Решение. Нормальный вектор n линейного многообразия H удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} n=a_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_2,\\ n\perp L\end{cases}\iff\begin{cases} n=a_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_2,\\ (n,a_1)=0,\\ (n,a_2)=0\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases} n=a_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_2,\\ \alpha_1(a_1,a_1)+\alpha_2(a_2,a_1)=-(a_0,a_1),\\ \alpha_1(a_1,a_2)+\alpha_2(a_2,a_2)=-(a_0,a_2).\end{cases}$$

Из последней системы следует, что $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, и следовательно, $n=(-1,0,0,3)-(1,1,1,1)+(1,0,2,-1)=(-1,-1,1,1)$. ∎

Пример 51.2. Найти нормальный вектор линейного многообразия H, заданного системой

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=3,\\ x_1-2x_2-x_3+x_4=-3.\end{cases}$$

Скалярное произведение в $\mathbf{R}^4$ задано стандартным образом.

Решение. Направляющим подпространством L линейного многообразия $H = a_0 + L$ служит множество решений приведенной однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

фундаментальная система решений

$$e_1 = (1, 0, 0, -1),\ e_2 = (1, 1, -1, 0)$$

которой, очевидно, образует базис в L.

Согласно определению нормального вектора n многообразия H, он ортогонален направляющему подпространству L или, что то же самое, его базису e_1, e_2. Тем самым, координаты (x_1, x_2, x_3, x_4) нормального вектора n удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ (n, e_1) = 0, \\ (n, e_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $n = (0, 1, 1, 0)$. ∎

Теорема 51.3. *Пусть $H = x_0 + L$ – линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Тогда*

$$\rho(f, H) = \rho(f - x_0, L).$$

Пример 51.3. Найти расстояние от многочлена $f(t) = -4 + 3t - t^2 + t^3$ до линейного многообразия H всех многочленов степени не выше 3, удовлетворяющих условиям $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$. Скалярное произведение в M_3 задано стандартным образом.

Решение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ принадлежит многообразию H тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 2. \end{cases}$$

Вектором сдвига x_0 многообразия H является многочлен, коэффициенты которого удовлетворяют этой системе – например, $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 0$, т.е. многочлен $x_0(t) = -1 + 2t$.

Расстояние от многочлена $f(t)$ до рассматриваемого линейного многообразия H равно расстоянию от многочлена $f(t) - x_0(t) = -3 + t - t^2 + t^3$ до направляющего подпространства L многообразия H, которое в данном случае описывается однородной системой

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что ортогональное дополнение $L^\perp$ является линейной оболочкой, натянутой на многочлены, коэффициенты которых совпадают с коэффициентами однородной системы, описывающей L, т.е. на многочлены $e_1(t) = 1 + t + t^2 + t^3$, $e_2(t) = t + 2t^2 + 3t^3$. Поэтому разложение многочлена $f(t) - x_0(t)$ на ортогональную проекцию $g(t)$ и перпендикуляр $h(t)$ будем искать в виде

$$f(t) - x_0(t) = g(t) + h(t) \iff f(t) - x_0(t) = g(t) + \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t).$$

Из последнего соотношения следует

$$\begin{cases} (f - x_0, e_1) = \alpha_1 (e_1, e_1) + \alpha_2 (e_2, e_1), \\ (f - x_0, e_2) = \alpha_1 (e_1, e_2) + \alpha_2 (e_2, e_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 4\alpha_1 + 6\alpha_2 = -2, \\ 6\alpha_1 + 14\alpha_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{matrix} \alpha_1 = -2, \\ \alpha_2 = 1. \end{matrix}$$

Следовательно, $h(t) = -2e_1(t) + e_2(t) = -2 - t + t^3$. Отсюда $\rho(f, H) = \rho(f - x_0, L) = |h| = \sqrt{6}$. ▪

Теорема 51.4. *Пусть $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ – линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве. Тогда*

$$\rho(H_1, H_2) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2).$$

Пример 51.4. Найти расстояние между линейным многообразием H_1 всех четных многочленов степени не выше 3, удовлетворяющих условию $f(1) = 1$, и линейным многообразием H_2 всех нечетных многочленов степени не выше 3. Скалярное произведение в M_3 задано стандартным образом.

Решение. Линейное многообразие H_1 имеет вектор сдвига $x_1(t) = 1$ и направляющее подпространство L_1, состоящее из всех четных многочленов, обращающихся в нуль при $t = 1$. Таким образом, L_1 одномерно и натянуто на многочлен $a_1(t) = 1 - t^2$.

Линейное многообразие H_2 является линейным подпространством, поэтому его вектор сдвига $x_2(t)$ можно выбрать нулевым, а направляющее подпространство L_2 двумерно и натянуто на многочлены $b_1(t) = t$, $b_2(t) = t^3$.

Расстояние между H_1 и H_2 согласно теореме 51.4 равно расстоянию от вектора $x_1(t) - x_2(t) = x_1(t)$ до подпространства $L_1 + L_2 = \mathcal{L}(a_1, b_1, b_2)$.

Найдем ортогональное дополнение подпространства $L_1 + L_2$. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ принадлежит $(L_1 + L_2)^\perp$ тогда и только тогда, когда

$$a_0 - a_2 = 0, \quad a_1 = a_3 = 0.$$

Следовательно, подпространство $(L_1 + L_2)^\perp$ одномерно и натянуто на многочлен $e(t) = 1 + t^2$, и разложение

$$x_1(t) = g(t) + h(t), \quad g(t) \in L_1 + L_2, \ h(t) \perp (L_1 + L_2),$$

будем искать в виде $x_1(t) = g(t) + \alpha e(t)$.

Имеем $(x_1, e) = \alpha(e, e)$, т.е. $\alpha = 1/2$. Следовательно, $h(t) = (1 + t^2)/2$ и $\rho(H_1, H_2) = |h| = 1/\sqrt{2}$. ▪

Углом между линейными многообразиями называется угол между их направляющими подпространствами.

ЗАДАЧИ

Нормальный вектор. Гиперплоскости

51.1. Доказать, что множество всех векторов евклидова (унитарного) пространства E, удовлетворяющих условию $(n, x) = b$, где n – фиксированный ненулевой вектор, b – заданное число, есть гиперплоскость этого пространства. В каком случае эта гиперплоскость является подпространством?

51.2. Доказать, что всякую гиперплоскость евклидова пространства можно описать уравнением $(n, x) = b$, в котором n и b – известные векторы.

51.3. Доказать, что если уравнения $(n_1, x) = b_1$ и $(n_2, x) = b_2$,

где n_1, n_2, b_1, b_2 – заданные векторы, определяют одну и ту же гиперплоскость, то $n_1 = \alpha n_2$, $b_1 = \alpha b_2$ для некоторого ненулевого числа α.

51.4. Показать, что для всякой гиперплоскости H, заданной условием $(n, x) = b$, можно указать вектор $x_0 \in H$ такой, что гиперплоскость H можно описать равенством $(n, x - x_0) = 0$.

51.5. В пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением для гиперплоскости, заданной условием $f(c) = d$, найти представление $(n, f) = b$. Указать соответствующий многочлен $n(t)$.

51.6. Всякую ли гиперплоскость пространства многочленов M_n можно задать условием вида $f(c) = d$?

51.7. Пусть $t_1 \in \mathbb{R}$ произвольно. Доказать, что любую гиперплоскость в пространстве многочленов M_n можно задать условием

$$\alpha_0 f(t_1) + \alpha_1 f'(t_1) + \ldots + \alpha_n f^{(n)}(t_1) = c$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, c \in \mathbb{R}$.

51.8. Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_n$ – произвольные различные между собой действительные числа. Доказать, что любую гиперплоскость в пространстве многочленов M_n можно задать условием

$$\alpha_0 f(t_0) + \alpha_1 f(t_1) + \ldots + \alpha_n f(t_n) = c$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, c \in \mathbb{R}$.

51.9. Пусть a_k, $k = \overline{0, n+1}$ – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1}$. Доказать, что любую гиперплоскость в пространстве многочленов M_n можно задать условием

$$\alpha_0 \int_{a_0}^{a_1} f(t)\,dt + \alpha_1 \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \ldots + \alpha_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt = c$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, c \in \mathbb{R}$.

51.10. Доказать, что в любом ортонормированном базисе e пространства всякая гиперплоскость может быть описана уравнением первой степени

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n = b$$

относительно координат $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ векторов этой гиперплоскости в базисе e.

51.11. Доказать, что если пересечение гиперплоскостей n-

мерного евклидова (унитарного) пространства

$$(n_1, x) = b_1,\ (n_2, x) = b_2, \ldots,\ (n_k, x) = b_k$$

непусто, то оно представляет собой линейное многообразие размерности $n - r$, где r – ранг системы векторов $n_1, \ldots, n_k$.

51.12. Найти нормальный вектор для гиперплоскости, заданной условием $(n, x) = b$.

51.12.1. Линейное многообразие H задано как пересечение r гиперплоскостей евклидова (унитарного) пространства:

$$(n_1, x) = b_1,\ (n_2, x) = b_2, \ldots, (n_r, x) = b_r,$$

причем векторы $n_1, n_2, \ldots, n_r$ линейно независимы. Доказать, что нормальный вектор многообразия H может быть найден по формуле

$$n = \sum_{k=1}^{r} \overline{\{G^{-1}b\}_k} n_k,$$

в которой $G = G(n_1, \ldots, n_r)$ – матрица Грама векторов $n_1, \ldots, n_r$.

51.13. Пусть n – нормальный вектор многообразия H (не совпадающего со всем пространством). Доказать, что многообразие H содержится в гиперплоскости $(n, x) = (n, n)$.

51.14. В пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением определить нормальный вектор для многообразия, заданного условиями:

а) $f(0) = 1,\ f(1) = 1$; б) $f'(0) = 1,\ f'(1) = 1$;

в) $f(1) = 1,\ f'(1) = 1$; г) $f(0) + f'(0) = 1,\ f(1) = 0$.

Метрические задачи

51.15. Подпространство L натянуто на линейно независимую систему векторов $a_1, \ldots, a_k$. Доказать, что расстояние от вектора x до линейного многообразия $H = x_0 + L$ равно

$$\rho(x, H) = \sqrt{\frac{\det G(a_1, \ldots, a_k, x - x_0)}{\det G(a_1, \ldots, a_k)}}.$$

51.16. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти расстояние от вектора $x = (5, 3, -1, -1)$ до многообразия $H = x_0 + L$, где $x_0 = (0, 0, -3, 6)$, а L натянуто на систему векторов $a_1 = (1, 0, 2, -2)$, $a_2 = (0, 1, 2, 0)$, $a_3 = (2, 1, 6, -4)$.

51.17. В пространстве M_n со стандартным скалярным произведением найти расстояние от многочлена $x(t) = 1 + t + \ldots + t^n$ до многообразия, заданного условием:

а) $f(1)=1$; б) $f(0)=f(1)=1$; в) $f(0)=f'(1)=1$.

51.18. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением найти расстояние от матрицы X, все элементы которой равны 1, до многообразия:

а) матриц A с единичным следом: $\operatorname{tr} A=1$;

б) всех матриц, у которых все строчные суммы равны 1;

в) всех матриц, у которых все строчные и все столбцовые суммы равны 1.

51.19. Доказать, что квадрат расстояния между прямыми $l_1: x=x_1+tq_1$ и $l_2: x=x_2+tq_2$ может быть вычислен по формуле:

1) $\rho^2(l_1,l_2)=\dfrac{\det G(q_1,q_2,x_1-x_2)}{\det G(q_1,q_2)}$, если прямые l_1 и l_2 не параллельны;

2) $\rho^2(l_1,l_2)=\dfrac{\det G(q_1,x_1-x_2)}{(q_1,q_1)}$, если прямые l_1 и l_2 параллельны.

Найти расстояние между прямыми $l_1: x=x_1+tq_1$ и $l_2: x=x_2+tq_2$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ считается введенным стандартным образом).

51.20. $x_1=(5,2,0,3)$, $q_1=(1,2,-4,1)$;
$x_2=(3,-1,3,1)$, $q_2=(1,0,-1,0)$.

51.21. $x_1=(5,4,3,2)$, $q_1=(1,1,-1,-1)$;
$x_2=(2,1,4,3)$, $q_2=(-3,-3,3,3)$.

Найти расстояние между плоскостями $P_1: x=x_1+t_1p_1+t_2p_2$ и $P_2: x=x_2+t_1q_1+t_2q_2$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^5$ считается введенным стандартным образом).

51.22. $x_1=(89,37,111,13,54)$, $x_2=(42,-16,-39,71,3)$,
$p_1=(1,1,0,-1,-1)$, $p_2=(1,-1,0,-1,1)$;
$q_1=(1,1,0,1,1)$, $q_2=(1,-1,0,1,-1)$.

51.23. $x_1=(5,0,-1,9,3)$, $x_2=(3,2,-4,7,5)$,
$p_1=(1,1,0,-1,-1)$, $p_2=(1,-1,0,-1,1)$;
$q_1=(1,1,0,1,1)$, $q_2=(0,3,0,1,-2)$.

51.24. $x_1=(4,0,-4,2,0)$, $x_2=(-1,1,1,0,-2)$,
$p_1=(1,2,2,-1,1)$, $p_2=(2,1,-2,1,-1)$;
$q_1=(8,7,-2,1,-1)$, $q_2=(5,4,-2,1,-1)$.

51.25. Доказать, что в любом базисе линейного пространства любая гиперплоскость может быть описана уравнением первой

степени относительно координат векторов этой гиперплоскости (ср. с задачей 51.10).

51.26. Доказать, что в любом базисе n-мерного линейного пространства всякое линейное многообразие размерности r может быть описано системой $n - r$ линейных уравнений относительно координат векторов этого многообразия.

51.27. Пусть H – некоторое линейное многообразие линейного пространства, не являющееся подпространством; x – произвольный вектор этого многообразия. Показать, что в пространстве можно ввести скалярное произведение таким образом, чтобы x был нормальным вектором многообразия H.

51.28. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между плоскостями $P_1 : x = x_1 + t_1 p_1 + t_2 p_2$ и $P_2 : x = x_2 + t_1 q_1 + t_2 q_2$, где

$$x_1 = (3,1,0,1),\ p_1 = (1,0,0,0),\ p_2 = (0,1,0,0),$$
$$x_2 = (2,1,1,3),\ q_1 = (1,1,1,1),\ q_2 = (1,-1,1,-1).$$

51.29. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением найти угол между многообразием H_1 матриц с единичным следом и подпространством всех симметрических матриц.

Глава XIV. Линейные операторы в линейных пространствах

§52. Линейный оператор и его матрица

Пусть V и W – линейные пространства над общим полем P. Отображение

$$\mathcal{A} : V \to W \tag{52.1}$$

называется *линейным отображением пространства V в пространство W*, если для любых $x, y \in V$, $\alpha \in P$

1) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$;

2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x$.

Линейное отображение (52.1) называют также *линейным преобразованием пространства V в пространство W* или *линейным оператором, действующим из пространства V в пространство W*.

Если $V = W$, то линейное отображение $\mathcal{A} : V \to V$ называют *линейным отображением (преобразованием) пространства V в себя*, а чаще – *линейным оператором, действующим в V*.

Если $W = P$, то линейное отображение (52.1) называют *линейной формой* или *линейным функционалом в пространстве V*. Линейный функционал обозначают строчными латинскими буквами (например, f), при этом образ вектора x – символом $f(x)$.

Множество всех линейных операторов, действующих из пространства V в пространство W, будем обозначать символом $\mathcal{L}(V, W)$.

В соответствии с определением равенства отображений (§11) операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны, если $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$, $\forall x \in V$.

Пример 52.1. Пусть M_n – пространство вещественных многочленов степени не выше n. Отображение $\mathcal{D} : M_n \to M_n$, определенное правилом

$$\mathcal{D}p(t) = p'(t),$$

является линейным и называется *оператором дифференцирования*.

Пример 52.2. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$. Отображение $\mathcal{P} : V \to V$, определенное правилом

$$\mathcal{P}x = x_1$$

для вектора $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, является линейным и называется *оператором проектирования* (*проектором*) *пространства V на L_1 параллельно L_2*.

Отображение $\mathcal{R} : V \to V$, определенное правилом

$$\mathcal{R}x = x_1 - x_2,$$

также является линейным и называется *оператором отражения пространства V относительно L_1 параллельно L_2*.

Пример 52.3. Отображение $\mathcal{O} : V \to W$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в нулевой вектор $\theta \in W$, является линейным и называется *нулевым оператором*.

Пример 52.4. Отображение $\mathcal{I} : V \to V$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в x, является линейным и называется *тождественным (единичным) оператором.*

Пример 52.5. Изоморфизм φ линейных пространств V и W (§44), очевидно, является линейным оператором, действующим из V в W.

Из определения оператора следует, что

1) *линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой вектор*;

2) *линейный оператор сохраняет линейные комбинации*, т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию их образов с теми же коэффициентами: $\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A} x_i$;

3) *линейный оператор сохраняет линейную зависимость*, т.е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

Теорема 52.1. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, а $g_1, \ldots, g_n$ – произвольные векторы пространства W. Тогда существует, и притом единственный, линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно.*

Следствие. Линейные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны тогда и только тогда, когда они совпадают на векторах какого-либо базиса V.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пространств V и W. Как следует из теоремы 52.1, линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. В свою очередь, векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1, n}$, однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \ldots + a_{m1} f_m, \\ \mathcal{A}e_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \ldots + a_{m2} f_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \ldots + a_{mn} f_m. \end{cases}$$

Матрица

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e и f*. Для обозначения этой матрицы используется также символ $(\mathcal{A})_{fe}$.

Из единственности разложения вектора по базису следует, что при фиксированных базисах e и f матрица линейного оператора определена однозначно.

Теорема 52.2. *Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$.*

Теорема 52.3. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, e и f – базисы пространств V и W соответственно. Тогда если $y = \mathcal{A}x$, то*

$$y_f = A_{fe} x_e.$$

Пусть $f \in \mathcal{L}(V, P)$ – линейная форма в пространстве V над полем P. Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, то линейная форма f однозначно определяется числами

$$\alpha_1 = f(e_1), \ldots, \alpha_n = f(e_n).$$

При этом для произвольного вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ выполнено равенство

$$f(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n .$$

Это представление называется *общим видом линейной формы f в базисе $e_1, \ldots, e_n$*. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются *коэффициентами линейной формы f в базисе $e_1, \ldots, e_n$*.

Если $W = V$, то при построении матрицы линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ используется один базис e пространства V: столбцами этой матрицы являются коэффициенты разложений векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ по базису $e_1, \ldots, e_n$; матрица обозначается символом A_e или $(\mathcal{A})_e$ и называется *матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе e*. Очевидно, $A_e \in P^{n \times n}$.

Пример 52.6. Выяснить, являются ли линейными следующие преобразования.

1. Преобразование $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_2, x_1)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ в себя.

2. Преобразование $\mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2 + 1)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ в себя.

3. Преобразование $\mathcal{A}X = \operatorname{tr} X$ пространства квадратных матриц $\mathbb{R}^{n \times n}$ в пространство $\mathbb{R}$.

4. Преобразование $\mathcal{A}X = \det X$ пространства квадратных матриц $\mathbb{R}^{n \times n}$ в пространство $\mathbb{R}$.

5. Преобразование $\mathcal{A}p(t) = p(2t + 1)$ пространства многочленов M_n в себя.

6. Преобразование $\mathcal{A}p(t) = \dfrac{p(1+t) - p(1-t)}{2t}$ пространства M_n в пространство M_{n-1}.

Решение. 1. Преобразование $\mathcal{A}$ является линейным, так как если $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\mathcal{A}(x + y) = (x_3 + y_3, -x_2 - y_2, x_1 + y_1) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y,$$
$$\mathcal{A}(\alpha x) = (\alpha x_3, -\alpha x_2, \alpha x_1) = \alpha \mathcal{A}x.$$

2. Преобразование $\mathcal{A}$ не является линейным, так как оно нулевой вектор $(0, 0)$ переводит в ненулевой вектор $(0, 1)$.

3. Преобразование $\mathcal{A}$ является линейным, так как в силу определения следа матрицы:

$$\mathcal{A}(X + Y) = \operatorname{tr}(X + Y) = \operatorname{tr} X + \operatorname{tr} Y = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y,$$
$$\mathcal{A}(\alpha X) = \operatorname{tr}(\alpha X) = \alpha \operatorname{tr} X = \alpha \mathcal{A}X.$$

Таким образом, это преобразование – линейная форма в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$.

4. Преобразование $\mathcal{A}$ является линейным лишь в случае $n = 1$, так как при $n \geq 2$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\mathcal{A}(\alpha X) = \det(\alpha X) = \alpha^n \det X = \alpha^n \mathcal{A}X,$$

что, например, при $\alpha = 2$ противоречит пункту 2 определения линейного оператора.

5. Преобразование $\mathcal{A}$ является линейным, так как для любых $p(t), q(t) \in M_n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(p(t) + q(t)) = p(2t + 1) + q(2t + 1) = \mathcal{A}p(t) + \mathcal{A}q(t),$$
$$\mathcal{A}(\alpha p(t)) = \alpha p(2t + 1) = \alpha \mathcal{A}p(t).$$

6. Убедимся сначала, что преобразование $\mathcal{A}$ переводит любой многочлен $p(t)$ степени не выше n в многочлен степени не выше $n - 1$. Действительно, при $t = 0$ многочлен $p(1 + t) - p(1 - t)$ обращается в нуль, и следовательно, в силу теоремы Безу его можно записать в виде $p(1 + t) - p(1 - t) = tp_1(t)$,

где $p_1(t)$ – многочлен на единицу меньшей степени, чем многочлен $p(1+t)-p(1-t)$. Поэтому $\mathcal{A}p(t)=p_1(t)\in M_{n-1}$.

Линейность вытекает из того, что для любых $p(t),q(t)\in M_n$ и $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(p(t)+q(t))=\frac{p(1+t)+q(1+t)-p(1-t)-q(1-t)}{2t}=\mathcal{A}p(t)+\mathcal{A}q(t),$$

$$\mathcal{A}(\alpha p(t))=\frac{\alpha p(1+t)-\alpha p(1-t)}{2t}=\alpha\mathcal{A}p(t).\quad\blacksquare$$

Пример 52.7. Построить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего из пространства M_2 в пространство M_1 по правилу

$$\mathcal{A}p(t)=\frac{p(1+t)-p(1-t)}{2t},$$

в паре естественных базисов пространств M_2 и M_1 (см. пример 52.6(6)).

Решение. Итак, в пространстве M_2 выбран базис $e_1=1, e_2=t, e_3=t^2$, а в пространстве M_1 – базис $f_1=1$, $f_2=t$. Тогда имеем:

$$\mathcal{A}e_1=\frac{1-1}{2t}=0=0f_1+0f_2,$$

$$\mathcal{A}e_2=\frac{(1+t)-(1-t)}{2t}=1=1f_1+0f_2,$$

$$\mathcal{A}e_3=\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{2t}=2=2f_1+0f_2.$$

Отсюда следует, что

$$A_{fe}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}.\quad\blacksquare$$

Пример 52.8. Построить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего из пространства $\mathbb{R}^{2\times2}$ в пространство $\mathbb{R}$ по правилу $\mathcal{A}X=\operatorname{tr}X$, в паре базисов

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad(52.2)$$

пространства $\mathbb{R}^{2\times2}$ и $f_1=1$ пространства $\mathbb{R}$.

Решение. Так как

$$\mathcal{A}E_1=1=1f_1,\ \mathcal{A}E_2=0=0f_1,\ \mathcal{A}E_3=0=0f_1,\ \mathcal{A}E_4=1=1f_1,$$

то матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A_{fe}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\end{bmatrix}.\quad\blacksquare$$

Пример 52.9. Построить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ умножения квадратных матриц второго порядка слева на заданную матрицу $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ в естественном базисе (52.2) пространства $\mathbb{R}^{2\times2}$.

Решение. Так как

$$\mathcal{A}E_1=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}=aE_1+cE_3,$$

$$\mathcal{A}E_2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}=aE_2+cE_4,$$

$$\mathcal{A}E_3=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d&0\end{bmatrix}=bE_1+dE_3,$$

$$\mathcal{A}E_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = bE_2 + dE_4,$$

то матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица A_e равна кронекерову произведению матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ на единичную матрицу I: $A_e = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes I$. ▪

Пример 52.10. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном линейном пространстве V, переводит линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис пространства V, а F и G – матрицы, столбцы которых являются координатными столбцами векторов $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ соответственно в базисе e. Доказать, что матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе e можно найти из соотношения

$$A_e = GF^{-1}.$$

Решение. В силу теоремы 52.3 выполнены равенства

$$(g_i)_e = A_e(f_i)_e, \quad i = \overline{1,n},$$

которые можно объединить в одно матричное соотношение

$$G = A_eF.$$

Так как векторы $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы, то и столбцы матрицы F линейно независимы, и следовательно, матрица F невырождена и $A_e = GF^{-1}$. ▪

Пример 52.11. Построить матрицу оператора проектирования $\mathcal{P}$ пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ на подпространство L_1 симметрических матриц параллельно подпространству L_2 кососимметрических матриц в базисе (52.2) пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Решение. Воспользуемся тождеством

$$X = \tfrac{1}{2}(X + X^T) + \tfrac{1}{2}(X - X^T),$$

которое, по существу, является разложением произвольной матрицы $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ по подпространствам L_1 и L_2, так что $X_1 = \frac{1}{2}(X + X^T)$ и $X_2 = \frac{1}{2}(X - X^T)$. Отсюда следует, что рассматриваемый здесь оператор проектирования действует по правилу

$$\mathcal{P}X = \tfrac{1}{2}(X + X^T).$$

Так как

$$\mathcal{P}E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1E_1, \quad \mathcal{P}E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = (E_2 + E_3)/2,$$

$$\mathcal{P}E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = (E_2 + E_3)/2, \quad \mathcal{P}E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1E_4,$$

то

$$P_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad ▪$$

Пример 52.12. Построить матрицу оператора отражения $\mathcal{R}$ пространства многочленов M_3 относительно подпространства $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ параллельно подпространству $L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(1) = f'(1) = 0\}$ в естественном базисе пространства M_3.

Решение. Выберем базисы: $f_1 = t^2$, $f_2 = t^3$ в L_1 и $f_3 = (1-t)^2$, $f_4 = t(1-t)^2$ в L_2. Нетрудно проверить, что $L_1 \oplus L_2 = M_3$.

Способ 1. Разложим произвольный многочлен $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ по базису f_1, f_2, f_3, f_4. Решая соответствующую неоднородную систему линейных уравнений, получим

$$p(t) = (a_2 + 2a_1 + 3a_0)t^2 + (a_3 - a_1 - 2a_0)t^3 + a_0(1-t)^2 + (a_1 + 2a_0)t(1-t)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{R}p(t) = (a_2 + 2a_1 + 3a_0)t^2 + (a_3 - a_1 - 2a_0)t^3 - a_0(1-t)^2 - (a_1 + 2a_0)t(1-t)^2.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{R}$ действует на векторы естественного базиса $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$, $e_4 = t^3$ пространства M_3 следующим образом:

$$\mathcal{R}e_1 = -1 + 6t^2 - 4t^3 = -e_1 + 6e_3 - 4e_4, \quad \mathcal{R}e_2 = -t + 4t^2 - 2t^3 = -e_2 + 4e_3 - 2e_4,$$
$$\mathcal{R}e_3 = t^2 = e_3, \qquad \mathcal{R}e_4 = t^3 = e_4.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathcal{R}$ в базисе e имеет вид

$$R_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Способ 2. Воспользуемся результатом примера 52.10.

Согласно определению оператора отражения $\mathcal{R}$ его действие на векторы базиса f_1, f_2, f_3, f_4 описывается соотношениями

$$\mathcal{R}f_1 = f_1, \quad \mathcal{R}f_2 = f_2, \quad \mathcal{R}f_3 = -f_3, \quad \mathcal{R}f_4 = -f_4.$$

В силу соотношения примера 52.10 $R_e = GF^{-1}$, где

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу R_e методом Гаусса–Жордана (§9):

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{элементарные преобразования столбцов}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Следовательно,

$$R_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Примеры линейных операторов

52.1. Доказать, что всякий линейный оператор, действующий в одномерном пространстве, сводится к умножению всех векторов пространства на фиксированное (для данного оператора) число (такие операторы называют *скалярными*).

52.2. Описать все линейные операторы пространства $\mathbb{R}_+$, введенного в задаче 44.9.

52.3. Выяснить, какие из следующих отображений линейного пространства V над полем P являются линейными операторами:

а) $\mathcal{A}x = a$ (a – фиксированный вектор);

б) $\mathcal{A}x = x + a$ (a – фиксированный вектор);

в) $\mathcal{A}x = \alpha x$ (α – фиксированное число из поля P).

√ **52.4.** Выяснить, какие из следующих отображений геометрического пространства V_3 являются линейными операторами (здесь $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – некоторые заданные векторы):

а) $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\,\mathbf{a}$; б) $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\,\mathbf{b}$;

в) $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\,\mathbf{x}$; г) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$;

д) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, [\mathbf{x}, \mathbf{b}]]$.

52.5. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ – фиксированные ненулевые векторы геометрического пространства V_2 или V_3. Показать, что следующие преобразования являются линейными, и выяснить их геометрический смысл:

а) $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$;

б) $\mathcal{A}\mathbf{x} = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\,\mathbf{a}$, если $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$;

в) $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{n})\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$;

г) $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\,\mathbf{a}$, если $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$;

д) $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n})\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$;

е) $\mathcal{A}\mathbf{x} = 2(\mathbf{x}, \mathbf{a})\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$;

ж) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – заданный единичный вектор.

52.6. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Выяснить, какие из следующих преобразований

пространства $\mathbb{R}^n$ являются линейными операторами:

а) $\mathcal{A}x = (x_3, x_1, x_2)$ $(n = 3)$;

б) $\mathcal{A}x = (x_3, x_1, x_2 - 1)$ $(n = 3)$;

в) $\mathcal{A}x = (x_2, x_1 - x_2)$ $(n = 2)$;

г) $\mathcal{A}x = (x_1, x_2, x_3^2)$ $(n = 3)$;

д) $\mathcal{A}x = (x_1 + 3x_2 - 2x_3, 3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3)$ $(n = 3)$;

е) $\mathcal{A}x = (\sin x_1, \cos x_2, x_3)$ $(n = 3)$;

ж) $\mathcal{A}x = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$;

з) $\mathcal{A}x = (x_1, 2|x_2|, -3x_3)$ $(n = 3)$.

52.7. Выяснить, какие из следующих преобразований пространства многочленов M_n являются линейными операторами:

а) $\mathcal{A}f(t) = f(-t)$; б) $\mathcal{A}f(t) = f(t + 1)$;

в) $\mathcal{A}f(t) = f(at + b)$, где $a \neq 0$, b – фиксированные числа;

г) $\mathcal{A}f(t) = f^{(k)}(t)$, где $k \in \mathbb{N}$ фиксировано;

д) $\mathcal{A}f(t) = f(t + 1) - f(t)$;

е) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) - g(t)$, где $g(t)$ – фиксированный ненулевой многочлен;

ж) $\mathcal{A}f(t) = tf(t)$; з) $\mathcal{A}f(t) = tf'(t)$;

и) $\mathcal{A}f(t) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(t-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$, где $k \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R}$ фиксированы;

к) $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{f(-t) - 2f(0) + f(t)}{t^2}$; л) $\mathcal{A}f(t) = f(t^2)$;

м) $^{\bullet}\mathcal{A}f(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(\xi)\,d\xi$.

52.8. Показать, что дифференцирование определяет линейное отображение:

а) пространства многочленов M_n в пространство многочленов M_{n-1};

б) пространства четных многочленов степени не выше $2n$ в пространство нечетных многочленов степени не выше $2n - 1$;

в) пространства нечетных многочленов степени не выше $2n + 1$ в пространство четных многочленов степени не выше $2n$.

52.9. Показать, что отображение $f(t) \mapsto f(t^2)$ определяет линейное преобразование пространства M_n в пространство многочленов M_{2n}.

52.10. Показать, что отображение $f(t) \mapsto \displaystyle\int_a^t f(\xi)\,d\xi$ при любом $a \in \mathbb{R}$ определяет линейное преобразование пространства

многочленов M_n в пространство M_{n+1}.

52.11. Выяснить, какие из следующих преобразований пространства матриц $\mathbb{R}^{n\times m}$ являются линейными операторами:

а) $\mathcal{A}X = X^T$;

б) $\mathcal{A}X = BX$, где B – заданная квадратная матрица n-го порядка;

в) $\mathcal{A}X = BXC$, где B, C – заданные квадратные матрицы n-го и m-го порядков соответственно;

г) $\mathcal{A}X = AX+XB$, где B, C – заданные квадратные матрицы n-го и m-го порядков соответственно;

д) $\mathcal{A}X = X_1$, где X_1 получена из матрицы X перестановкой первого и последнего столбцов.

52.12. Выяснить, какие из следующих отображений являются линейными операторами, действующими из пространства квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ в подходящее линейное пространство V (в каждом случае указать это пространство V):

а) $\mathcal{A}X = \frac{1}{2}(X + X^T)$; б) $\mathcal{A}X = \frac{1}{2}(X - X^T)$;

в) $\mathcal{A}X = \operatorname{tr} X$;

г) $\mathcal{A}X = \operatorname{tr}(BX)$, где B – заданная квадратная матрица n-го порядка;

д) $\mathcal{A}X = \det X$;

е) $\mathcal{A}X = \det(BX)$, где B – заданная квадратная матрица n-го порядка;

ж) $\mathcal{A}X = \operatorname{rg} X$;

з) $\mathcal{A}X = XC$, где C – заданная матрица размера $n \times m$;

и) $\mathcal{A}X = [X, B]$ – коммутатор матрицы X и заданной квадратной матрицы B порядка n;

к) $\mathcal{A}X = X \otimes B$ – кронекерово произведение матрицы X и заданной матрицы B размера $m \times k$.

52.13. Доказать линейность отображения $\mathcal{A}$ и выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным или биективным, если:

а) $\mathcal{A}$ – нулевое отображение;

б) $\mathcal{A}$ – тождественное отображение;

в) $\mathcal{A}$ сводится к умножению каждого вектора на фиксированное ненулевое число из поля.

52.14. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ – линейно независимые векторы линейного пространства V, а $g_1, \ldots, g_k$ – некоторые векторы пространства W. Доказать, что существует линейный оператор $\mathcal{A} \in$

$\mathcal{L}(V,W)$ такой, что $\mathcal{A}f_i = g_i$ для всех $i = \overline{1,k}$. В каком случае оператор $\mathcal{A}$ единствен?

52.15. Пусть $f_1,\ldots,f_k$ – векторы линейного пространства V, а $g_1,\ldots,g_k$ – векторы пространства W. Найти необходимые и достаточные условия, при которых:

а) существует линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ такой, что $\mathcal{A}f_i = g_i$ для всех $i = \overline{1,k}$;

б) такой линейный оператор $\mathcal{A}$ единствен.

52.16. Пусть L – линейное подпространство пространства V, $\mathcal{A}$ – произвольный линейный оператор, действующий из L в некоторое линейное пространство W.

1. Доказать, что найдется оператор из $\mathcal{L}(V,W)$, действие которого на подпространстве L совпадает с оператором $\mathcal{A}$.

2. Показать, что если поле P бесконечно, то таких линейных операторов существует бесконечно много.

52.17. В пространстве многочленов M_n построить два различных оператора, совпадающих на подпространстве M_{n-1} с оператором дифференцирования.

52.18. Пусть пространство V есть прямая сумма подпространств $L_1,\ldots,L_p$. Показать, что действие линейного оператора $\mathcal{A}$ на любой вектор пространства определяется единственным образом, если известно действие этого оператора на каждом из подпространств $L_1,\ldots,L_p$.

52.19. Выяснить, какие из следующих отображений пространства V_3 являются линейными формами:

а) $f(\mathbf{x}) = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ задано;

б) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор;

в) $f(\mathbf{x}) = \cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{a}})$, где $\mathbf{a}$ – заданный ненулевой вектор;

г) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$;

д) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b})$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – заданные векторы;

е) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, [\mathbf{a}, \mathbf{x}])$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор.

52.20. В пространстве V фиксирован базис $e_1,\ldots,e_n$. Доказать, что отображение, ставящее в соответствие каждому вектору x пространства V его i-ю координату в этом базисе, является линейной формой.

52.21. Пусть $a \in \mathbb{R}$ – некоторое фиксированное число. Показать, что отображение $f(t) \mapsto f(a)$ задает в пространстве многочленов M_n линейную форму. Верно ли обратное: всякую линейную форму в пространстве M_n можно задать таким образом при

подходящем выборе числа a?

52.22. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ – некоторые фиксированные числа. Показать, что отображение $f(t) \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ задает в пространстве многочленов M_n линейную форму. Верно ли обратное: всякую линейную форму в пространстве M_n можно задать таким образом при подходящем выборе чисел a и b?

52.23. Может ли линейная форма на комплексном линейном пространстве принимать только действительные значения?

Матрица линейного оператора

Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$. Построить матрицу этого оператора: а) в естественном базисе e_1, e_2, e_3; б) в базисе $e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 + e_3$.

52.24. $\mathcal{A}x = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

52.25. $\mathcal{A}x = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

52.26. $\mathcal{A}x = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$.

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^3$, переводит векторы f_1, f_2, f_3 соответственно в векторы g_1, g_2, g_3. Построить матрицу этого оператора: а) в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$, б) в базисе f_1, f_2, f_3.

52.27. $f_1 = (2, 3, 5)$, $f_2 = (0, 1, 2)$, $f_3 = (1, 0, 0)$,
$g_1 = (1, 1, 1)$, $g_2 = (1, 1, -1)$, $g_3 = (2, 1, 2)$.

52.28. $f_1 = (2, 0, 3)$, $f_2 = (4, 1, 5)$, $f_3 = (3, 1, 2)$,
$g_1 = (1, 2, -1)$, $g_2 = (4, 5, -2)$, $g_3 = (1, -1, 1)$.

52.29. $f_1 = (5, 3, 1)$, $f_2 = (1, -3, -2)$, $f_3 = (1, 2, 1)$,
$g_1 = (-2, 1, 0)$, $g_2 = (-1, 3, 0)$, $g_3 = (-2, -3, 0)$.

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, переводит линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}^n$ соответственно в векторы $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}^m$. Построить матрицу этого оператора в паре естественных базисов пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

52.30. $n = 2$, $m = 3$,
$f_1 = (2, -1)$, $f_2 = (1, -1)$,
$g_1 = (-4, 2, -1)$, $g_2 = (-1, 1, -1)$.

52.31. $n = 3$, $m = 2$,
$f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 1)$, $f_3 = (1, 0, 1)$,

$g_1 = (3, -1)$, $g_2 = (2, 0)$, $g_3 = (0, 1)$.

52.32. $n = 2$, $m = 5$,

$f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (1, 1)$,

$g_1 = (-2, -2, 2, 3, 0)$, $g_2 = (5, -1, -2, 0, 3)$.

52.33. $n = 4$, $m = 2$,

$f_1 = (4, 3, -1, 7)$, $f_2 = (5, 2, 3, 7)$, $f_3 = (9, 7, 2, 6)$,

$f_4 = (-3, 2, 2, 1)$,

$g_1 = (0, 8)$, $g_2 = (35, 33)$, $g_3 = (19, 19)$, $g_4 = (-2, 0)$.

52.34. $n = 3$, $m = 4$,

$f_1 = (1, 1, 2)$, $f_2 = (1, 2, 3)$, $f_3 = (1, 2, 4)$,

$g_1 = (-4, 2, 14, -6)$, $g_2 = (-2, 1, 7, -3)$, $g_3 = (-6, 3, 21, -9)$.

52.35. $n = 4$, $m = 3$,

$f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, -1, -1)$, $f_3 = (1, -1, 1, -1)$,

$f_4 = (-1, 1, 1, -1)$,

$g_1 = (0, 8, 0)$, $g_2 = (-2, 8, 4)$, $g_3 = (2, 24, -4)$, $g_4 = (4, 8, -8)$.

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в комплексном арифметическом пространстве $\mathbb{C}^2$, переводит векторы f_1, f_2 соответственно в векторы g_1, g_2. Построить матрицу этого оператора в естественном базисе пространства $\mathbb{C}^2$.

52.36. $f_1 = (i, 1)$, $f_2 = (1, i)$, $g_1 = (i-1, i+1)$, $g_2 = (i+1, i-1)$.

52.37. $f_1 = (1, -i)$, $f_2 = (-i, 1)$, $g_1 = (0, 0)$, $g_2 = (2, 2i)$.

52.38. $f_1 = (1, i)$, $f_2 = (0, 1)$, $g_1 = (i, -1)$, $g_2 = (1, 2i)$.

Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве многочленов M_n. Построить матрицу этого оператора в естественном базисе этого пространства.

52.39. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ – оператор дифференцирования.

52.40. $\mathcal{A} = \mathcal{D}^2$ – оператор двукратного дифференцирования.

52.41. $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ – разностный оператор (h – фиксированное положительное число).

52.42. $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(\xi)\,d\xi$.

52.43. $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{f(a+t) - f(a-t)}{2t}$, где a – произвольное фиксированное число.

52.44. Рассматривая оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ как оператор, действующий из M_n в M_{n-1}, построить его матрицу в

паре базисов $1, t, t^2, \ldots, t^n$ и $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$. В этой же паре базисов найти матрицу оператора интегрирования

$$\mathcal{A}f(t) = \int_0^t f(\xi)\,d\xi$$

как оператора из M_{n-1} в M_n.

52.45. Пространство V является прямой суммой подпространств L_1 и L_2. Базис $e_1, \ldots, e_n$ выбран таким образом, что векторы $e_1, \ldots, e_k$ образуют базис подпространств L_1, а векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ – базис подпространства L_2. В базисе $e_1, \ldots, e_n$ составить:

а) матрицу оператора проектирования на L_1 параллельно L_2;

б) матрицу оператора проектирования на L_2 параллельно L_1;

в) матрицу оператора отражения относительно L_1 параллельно L_2.

52.46. Пусть в пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. Для линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего по правилу:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x},\ \mathbf{a}],$$

где $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ – фиксированный ненулевой вектор, найти матрицу в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

52.47. Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ – некоторые единичные векторы геометрического пространства V_3, координаты которых заданы в прямоугольной декартовой системе координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, если $\mathcal{A}$ осуществляет:

а) ортогональное проектирование на плоскость $(\mathbf{r},\ \mathbf{n}) = 0$;

б) ортогональное проектирование на прямую $[\mathbf{r},\ \mathbf{a}] = \mathbf{0}$;

в) проектирование на плоскость $(\mathbf{r},\ \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$ $((\mathbf{a},\ \mathbf{n}) \neq 0)$;

г) проектирование на прямую $[\mathbf{r},\ \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ параллельно плоскости $(\mathbf{r},\ \mathbf{n}) = 0$ $((\mathbf{a},\ \mathbf{n}) \neq 0)$;

д) ортогональное отражение относительно плоскости $(\mathbf{r},\ \mathbf{n}) = 0$;

е) ортогональное отражение относительно прямой $[\mathbf{r},\ \mathbf{a}] = \mathbf{0}$;

ж) отражение относительно плоскости $(\mathbf{r},\ \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$ $((\mathbf{a},\ \mathbf{n}) \neq 0)$;

з) отражение относительно прямой $[\mathbf{r},\ \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ параллельно плоскости $(\mathbf{r},\ \mathbf{n}) = 0$ $((\mathbf{a},\ \mathbf{n}) \neq 0)$.

52.48. Пусть в геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$ найти матрицу оператора $\mathcal{P}$ ортогонального проектирования на подпространство L , если L является:

а) прямой $x = z = 0$;

б) прямой $x = y = z$;

в) плоскостью $x + y + z = 0$;

г) плоскостью, натянутой на векторы $\mathbf{a} = \{-1, 1, -1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, -3, 2\}$.

52.49. Пусть в геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$ найти матрицу оператора $\mathcal{P}$ проектирования на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, если:

а) L_1 определено уравнением $x = 0$, а L_2 – уравнениями $2x = 2y = -z$;

б) L_1 имеет уравнение $x = y$, а L_2 определяется системой уравнений $x + y + z = 0$, $2x + y + 4z = 0$;

в) L_1 определено уравнениями $-20x = 15y = 12z$, а L_2 – уравнением $2x + 3y - z = 0$;

г) L_1 определено системой уравнений $x - y + z = 0$, $2x - 3y + 4z = 0$, а L_2 – уравнением $2x + 3y - 4z = 0$.

52.50. Пусть в геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$ найти матрицу оператора $\mathcal{R}$ ортогонального отражения относительно:

а) плоскости $x = 0$;

б) прямой $x = 2y = z$;

в) плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{a} = \{1, 0, -1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, 1, -2\}$.

52.51. Пусть в геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$ найти матрицу оператора $\mathcal{R}$ отражения:

а) относительно плоскости $x = 0$ параллельно прямой $2x = y = -z$;

б) относительно прямой $x = z$, $x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x + y = 0$.

52.52. В геометрическом пространстве V_3 задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$. Построить в этом базисе матрицу оператора поворота пространства:

а) на угол α вокруг вектора $\mathbf{e}_3$;

б) на угол $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$;

в) на угол $2\pi/3$ вокруг прямой $x = y = z$.

52.53. В естественном базисе (52.2) пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка найти матрицу:

а) оператора умножения слева на заданную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ второго порядка;

б) оператора умножения справа на заданную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ второго порядка.

52.54. В естественном базисе (52.2) пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка найти матрицу:

а) оператора транспонирования,

б) оператора $\mathcal{G}$, который каждой матрице X ставит в соответствие матрицу AXB, где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – заданные квадратные матрицы второго порядка,

в) оператора $\mathcal{F}$, определенного соотношением

$$\mathcal{F}X = AX + XB,$$

где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – заданные квадратные матрицы второго порядка.

52.55. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ фиксирован естественный базис из матричных единиц $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{in}$, $i = \overline{1,m}$. Пусть далее A и B – заданные квадратные матрицы соответственно порядков m и n. Рассмотрим операторы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$, определенные соотношениями

$$\mathcal{G}X = AXB,$$
$$\mathcal{F}X = AX + XB.$$

Доказать, что в указанном базисе матрица:

а) оператора $\mathcal{G}$ есть кронекерово произведение $A \otimes B^T$;

б) оператора $\mathcal{F}$ есть $A \otimes I_n + I_m \otimes B^T$.

Найти матрицы тех же операторов в естественном базисе, занумерованном другим образом: $E_{1j}, E_{2j}, \ldots, E_{mj}$, $j = \overline{1,n}$.

52.56. Отображение $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^2$ в пространство матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ задано соотношением

$$\mathcal{A}(x,y) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Показать линейность и инъективность этого отображения и построить его матрицу в естественных базисах пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (см. (52.2)).

52.57. Отображение $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ в пространство матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ задано соотношением

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Показать линейность и инъективность этого отображения и построить его матрицу в естественных базисах пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (см. (52.2)).

52.58. Отображение $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ в вещественное пространство комплексных матриц $\mathbb{C}^{2\times 2}$ задано соотношением

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{bmatrix}.$$

Показать линейность и инъективность этого отображения и построить его матрицу в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ и базисе E_{11}, iE_{11}, E_{21}, iE_{21}, E_{12}, iE_{12}, E_{22}, iE_{22} пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

52.59. Отображение $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^4$ в вещественное пространство комплексных матриц $\mathbb{C}^{2\times 2}$ задано соотношением

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

где $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$. Показать линейность и инъективность этого отображения и построить его матрицу в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ и базисе пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$, указанном в предыдущей задаче.

§53. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентные и подобные матрицы

Матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ называются *подобными*, если существует невырожденная матрица Q такая, что

$$A = Q^{-1}BQ.$$

Теорема 53.1. *Матрицы A_{fe} и A_{st} линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ в парах базисов e, f и $t = eC$, $s = fD$ связаны соотношением*

$$A_{st} = D^{-1}A_{fe}C.$$

Следствие 1. *Матрицы линейного оператора в различных парах базисов эквивалентны* (§16).

Следствие 2. *Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов.*

Теорема 53.2. *Две матрицы A и B над полем P одинакового размера $m \times n$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются*

матрицами одного и того же линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линейные пространства над полем P размерностей n и m соответственно.

Если $W = V$, то при переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ изменяется по закону:

$$A_f = Q^{-1} A_e Q. \tag{53.1}$$

Таким образом, *одному и тому же линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ соответствует целый класс матриц, подобных друг другу.*

Очевидно, что две матрицы $A, B \in P^{n \times n}$ подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве над полем P (теорема 53.2).

Из соотношения (53.1) следует, что все матрицы одного и того же линейного оператора имеют одинаковый определитель. *Определителем линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$* называется определитель матрицы этого оператора в произвольном базисе. Обозначение: $\det \mathcal{A}$. Итак,

$$\det \mathcal{A} = \det A_e.$$

Пример 53.1. Пусть оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве V, переводит линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис пространства V, а F и G – матрицы, столбцы которых являются координатными столбцами соответственно векторов $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ в базисе e. Доказать, что матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе f можно найти из соотношения

$$A_f = F^{-1} G.$$

Решение. Как показано выше в примере 52.10, выполнено соотношение $A_e = GF^{-1}$.

Так как матрица перехода от базиса e к базису f совпадает с матрицей F, то в силу соотношения (53.1)

$$A_f = F^{-1}(GF^{-1})F = F^{-1}G. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Матрицы оператора в различных базисах

53.1. Как изменится матрица линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$, если в этом базисе:

а) поменять местами два вектора e_i и e_j;

б) умножить вектор e_i на число $\alpha \neq 0$?

53.2. Доказать, что матрицы одного и того же линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в двух базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица перехода от одного из этих базисов к другому перестановочна с матрицей линейного оператора в одном из этих базисов.

53.3. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет верхнюю треугольную матрицу. В каком базисе его матрица будет нижней треугольной?

53.4. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) e_1, e_3, e_2, e_4;

б) e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

53.5. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

53.6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе

$$f_1 = (8, -6, 7),\ f_2 = (-16, 7, -13),\ f_3 = (9, -3, 7)$$

имеет матрицу

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$g_1 = (1, -2, 1),\ g_2 = (3, -1, 2),\ g_3 = (2, 1, 2).$$

53.7. Дан вектор $\mathbf{a} = \{1, 2, 3\}$. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\,\mathbf{a}$ геометрического пространства V_3:

а) в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, в котором даны координаты всех векторов;

б) в базисе $\mathbf{b}_1 = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{b}_2 = \{2, 0, -1\}$, $\mathbf{b}_3 = \{1, 1, 0\}$.

53.8. В геометрическом пространстве V_2 задана аффинная система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ найти матрицу оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ осуществляет:

а) отражение плоскости относительно прямой $x + 2y = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$;

б) проектирование плоскости на прямую $x + y = 0$ параллельно прямой $4x + 5y = 0$;

в) сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к прямой $3x - 2y = 0$ параллельно прямой $x - y = 0$.

53.9. В геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ осуществляет:

а) проектирование на плоскость $3x - y = 0$ параллельно прямой $x + z = 0$, $x + y + 2z = 0$;

б) отражение пространства относительно прямой $x = y = -2z$ параллельно плоскости $x + y + 3z = 0$;

в) сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к плоскости $x - 2z = 0$ параллельно прямой $x = y = z$;

г) поворот вокруг прямой $x = y = -z$ на угол $\pi/2$;

д) поворот вокруг прямой $x + y = 0$, $y - z = 0$ на такой угол, что первая из данных плоскостей переходит во вторую.

53.10. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном линейном пространстве V, переводит линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис пространства V, а F и G – матрицы, столбцы которых являются координатными столбцами соответственно векторов $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ в базисе e. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$:

а) в базисе e;

б) в базисе f из столбцов матрицы F;

в) в базисе g из столбцов матрицы G (при условии, что G невырождена).

53.11. Пусть A – невырожденная вещественная матрица порядка n, B – вещественная матрица размера $m \times n$. Доказать, что найдется единственное линейное отображение $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, при котором образами столбцов матрицы A являются соответствующие столбцы матрицы B. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$:

а) в естественных базисах пространств;

б) в базисе пространства $\mathbb{R}^n$ из столбцов матрицы A и естественном базисе пространства $\mathbb{R}^m$;

в) в базисе пространства $\mathbb{R}^n$ из столбцов матрицы A и базисе пространства $\mathbb{R}^m$ из столбцов матрицы B (при условии, что $m = n$ и B невырождена).

53.12. Координаты векторов f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2, g_3 трехмерного линейного пространства V заданы в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит векторы f_i в g_i $(i = 1, 2, 3)$. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$: а) в базисе e_1, e_2, e_3; б) в базисе

f_1, f_2, f_3, если:

1) $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,0,-3)$, $f_3 = (0,1,3)$,
   $g_1 = (1,1,1)$, $g_2 = (2,0,-6)$, $g_3 = (0,2,6)$;
2) $f_1 = (1,1,-1)$, $f_2 = (2,1,0)$, $f_3 = (3,0,2)$,
   $g_1 = (0,0,0)$, $g_2 = (2,1,0)$, $g_3 = (3,0,2)$;
3) $f_1 = (0,2,1)$, $f_2 = (-1,1,-1)$, $f_3 = (1,-2,0)$,
   $g_1 = (0,0,0)$, $g_2 = (-2,2,-2)$, $g_3 = (1,-3,-1)$;
4) $f_1 = (2,0,-1)$, $f_2 = (-1,2,-1)$, $f_3 = (0,-1,1)$,
   $g_1 = (-6,0,3)$, $g_2 = (5,-6,2)$, $g_3 = (0,-2,2)$.

53.13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе e матрицу A_e, а координатные столбцы векторов нового базиса f образуют матрицу S. Вычислить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе f, если:

1) $A_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$;

2) $A_e = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $A_e = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$;

4) $A_e = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$;

5) $A_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

6) $A_e = \begin{bmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

7) $A_e = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

8) $A_e = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$;

9) $A_e = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

10) $A_e = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

53.14. Линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе e комплексного линейного пространства матрицу A_e, а координатные столбцы векторов нового базиса f образуют матрицу S. Вычислить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе f, если:

1) $A_e = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$;

2) $A_e = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \end{bmatrix}$;

3) $A_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

4) $A_e = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -i & -1 & i \\ -i & 3i-3 & i & -3-3i \end{bmatrix}$.

53.15. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, задан матрицей A_{fe} в паре естественных базисов этих пространств. Координатные столбцы новых базисных векторов g и h составляют соответственно матрицы S и T. Вычислить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов g и h, если:

1) $n = 3$, $m = 2$,

$A_{fe} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$;

2) $n = 4$, $m = 2$,

$A_{fe} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

3) $n = 2$, $m = 3$,

$$A_{fe}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}9&-5\\-5&3\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&3&4\end{bmatrix};$$

4) $n=3$, $m=4$,

$$A_{fe}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\4&7&5\\-1&-2&-3\\2&5&13\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&-1&7\\1&1&1&-6\end{bmatrix}.$$

53.16. Пусть $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования в пространстве M_n. Вычислить матрицу оператора $\mathcal{D}$ в следующих базисах этого пространства:

1) $1+t,\ t+2t^2,\ 3t^2-1$ $(n=2)$;

2) $t^3+1,\ 1-t,\ 1-t+t^2,\ 1-t+t^2-t^3$ $(n=3)$;

3) $1,\ t,\ t^2,\ldots,\ t^n$ $(n\geq 1)$;

4) $1,\ t,\ t^2/2!,\ldots,\ t^n/n!$ $(n\geq 1)$;

5) $1,\ 1+t,\ 1+t+\frac{1}{2!}t^2,\ldots,\ 1+t+\ldots+\frac{1}{n!}t^n$ $(n\geq 1)$;

6) $1,\ 1+t,\ 1+t+t^2,\ldots,\ 1+t+\ldots+t^n$ $(n\geq 1)$;

7) $1,\ t-t_0,\ (t-t_0)^2,\ldots,\ (t-t_0)^n$ $(n\geq 1,\ t_0\in\mathbb{R})$;

8) $1,\ t-1,\ t^2-t,\ldots,\ t^n-t^{n-1}$ $(n\geq 1)$.

53.17. В базисе $1, t, t^2$ пространства M_2 оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе, составленном из многочленов $3t^2+2t,\ 5t^2+3t+1,\ 7t^2+5t+3$.

53.18. Пусть $\mathcal{A}$ – оператор транспонирования в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Построить матрицу этого оператора в базисе:

а) $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$.

53.19. Пусть $\mathcal{C}$ – оператор в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$, ставящий в соответствие каждой матрице X значение ее коммутатора $[X, A]$

с матрицей $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Эквивалентные и подобные матрицы

53.20. Доказать, что отношение подобия на множестве всех невырожденных матриц одного порядка является отношением эквивалентности.

53.21. Пусть матрицы A и B подобны: $B = S^{-1}AS$. Однозначно ли при этом определена матрица преобразования S?

53.22. Показать, что скалярная матрица подобна только самой себе. Доказать, что этим свойством обладают только скалярные матрицы.

53.23. Пусть A – фиксированная квадратная матрица. Доказать, что множество матриц S, для которых $A = S^{-1}AS$, является группой по умножению.

53.24. Пусть A и B – подобные матрицы. Доказать, что если матрица S_0 такова, что $B = S_0^{-1}AS_0$, то все множество матриц S, осуществляющих преобразование подобия: $B = S^{-1}AS$, получается из множества матриц $\{P \mid A = P^{-1}AP\}$ путем умножения этих матриц справа на матрицу S_0.

53.25. Показать, что матрица A переходит в подобную, если над ней выполняется любое из следующих преобразований:

а) i-я строка умножается на число $\alpha \neq 0$, а затем i-й столбец умножается на число $1/\alpha$;

б) к i-й строке прибавляется j-я, умноженная на число β, а затем из j-го столбца вычитается i-й, умноженный на β;

в) переставляются i-я и j-я строки, а затем i-й и j-й столбцы;

г) каждый элемент матрицы заменяется на симметричный ему относительно «центра» матрицы.

53.26. Доказать, что если хотя бы одна из двух матриц A или B невырождена, то матрицы AB и BA подобны. Верно ли это утверждение, если обе матрицы вырождены?

53.27. Доказать, что преобразование подобия сохраняет следующие свойства матриц:

а) невырожденность;

б) нильпотентность;
в) периодичность;
г) ортогональность.

53.28. Пусть A – симметрическая матрица, а матрица B подобна матрице A. Доказать, что для того, чтобы B также была симметрической матрицей достаточно, чтобы матрица преобразования была ортогональна. Является ли это условие необходимым?

53.29. Матрица B получена из матрицы A преобразованием подобия. Выяснить, верны ли следующие утверждения:

а) если A – треугольная матрица, то B – также треугольная;

б) если A – стохастическая матрица, то B – также стохастическая.

53.30. Пусть матрицы A и B подобны и $B = S^{-1}AS$. Доказать, что:

а) $\det B = \det A$;
б) $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A$;
в) $B = I$ тогда и только тогда, когда $A = I$;
г) $B = A$ тогда и только тогда, когда A и S перестановочны;
д) $B^k = S^{-1}A^kS$ для любого $k \in \mathbb{N}$;
е) $f(B) = S^{-1}f(A)S$ для любого многочлена $f(t)$;
ж) $B^{-1} = SA^{-1}S^{-1}$.

53.31. Пусть квадратные матрицы A и B n-го порядка эквивалентны. Означает ли это, что матрицы A^2 и B^2 также эквивалентны?

53.32. Матрицы A и B порядков n и m подобны соответственно матрицам C и D. Доказать, что:

а) произведения $A \otimes B$ и $C \otimes D$ подобны;

б) матрицы $A \otimes I_n + I_m \otimes B^T$ и $C \otimes I_n + I_m \otimes D^T$ подобны.

53.33. Показать, что если комплексные матрицы $A_1 = B_1 + iC_1$ и $A_2 = B_2 + iC_2$ подобны, то подобны и действительные матрицы

$$D_1 = \begin{bmatrix} B_1 & -C_1 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} B_2 & -C_2 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix}.$$

§54. Образ и ядро линейного оператора

Образом линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется множество

$$\operatorname{im}\mathcal{A} = \{y \in W \mid \exists x \in V : \mathcal{A}x = y\},$$

ядром оператора $\mathcal{A}$ – множество

$$\ker \mathcal{A} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \theta\}.$$

Пример 54.1. В пространстве многочленов M_n для оператора дифференцирования (§52): $\operatorname{im} \mathcal{D} = M_{n-1}$, $\ker \mathcal{D} = M_0$.

Пример 54.2. Для оператора проектирования (§52): $\operatorname{im} \mathcal{P} = L_1$, $\ker \mathcal{P} = L_2$.

Пример 54.3. Для оператора отражения (§52): $\operatorname{im} \mathcal{R} = V$, $\ker \mathcal{R} = \{\theta\}$.

Теорема 54.1. *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *то* $\ker \mathcal{A}$ – *линейное подпространство пространства* V, $\operatorname{im} \mathcal{A}$ – *линейное подпространство пространства* W.

Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а *дефектом* – размерность ядра. Обозначения: $\operatorname{rg} \mathcal{A}$, $\operatorname{def} \mathcal{A}$. Итак, $\operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{im} \mathcal{A}$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}$.

Теорема 54.2. *Если* $e_1, \ldots, e_n$ – *базис пространства* V, *то*

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n).$$

Теорема 54.3. *Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Теорема 54.4 (о ранге и дефекте). *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *то*

$$\operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim V.$$

Пример 54.4. Пусть $\mathcal{C}$ – оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$, – ставит в соответствие каждой матрице X значение ее коммутатора $[X, A]$ с заданной матрицей $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Найти образ оператора $\mathcal{C}$.

Решение. Выберем в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ естественный базис из матриц (52.2). Тогда

$$\mathcal{C}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения базиса линейной оболочки, натянутой на найденные образы базисных матриц, воспользуемся изоморфизмом пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ пространству $\mathbb{R}^4$ и исследуем линейную оболочку, натянутую на арифметические векторы

$$(0, b, -c, 0),\ (c, d-a, 0, -c),\ (-b, 0, a-d, b),\ (0, -b, c, 0).$$

Составим матрицу из координат этих векторов:

$$\begin{bmatrix} 0 & b & -c & 0 \\ c & d-a & 0 & -c \\ -b & 0 & a-d & b \\ 0 & -b & c & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c & d-a & 0 & -c \\ -b & 0 & a-d & b \\ 0 & b & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если $a = d$, $b = c = 0$, то ранг этой матрицы равен нулю, и следовательно, образ оператора $\mathcal{C}$ – нулевое подпространство.

В противном случае первые три строки последней матрицы линейно зависимы, так как их линейная комбинация с коэффициентами b, c, $a - d$ равна нулевой строке. Поэтому ранг последней матрицы не превосходит двух.

Если $b \neq 0$, то $\operatorname{rg} \mathcal{C} = 2$ и базис образа образуют матрицы

$$\begin{bmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Если $c \neq 0$, то $\operatorname{rg} C = 2$ и базис образа образуют матрицы

$$\begin{bmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Если $b = c = 0$ и $a \neq d$, то $\operatorname{rg} C = 2$ и базис образа образуют матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Теорема 54.5 (о канонической паре базисов). *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\operatorname{rg} \mathcal{A} = r$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда существуют базисы e и f пространств V и W, в которых оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $I_r \in P^{m \times n}$ вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & & 1 & \\ \hline & O & & O \end{array}\right] \Bigg\}^{r},$$

в которой все элементы равны нулю, кроме первых r диагональных элементов, равных единице.

ЗАДАЧИ

54.1. Что можно сказать о матрице оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ранга r, если в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ принадлежат ядру этого оператора?

54.2. Что можно сказать о матрице оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ранга r, если в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V векторы $e_1, \ldots, e_r$ принадлежат образу этого оператора?

54.2.1. Доказать, что:

а) линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ задает сюръективное отображение тогда и только тогда, когда при любом выборе базисов пространств V и W матрица оператора $\mathcal{A}$ является матрицей полного ранга по строкам;

б) линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ задает инъективное отображение тогда и только тогда, когда при любом выборе базисов пространств V и W матрица оператора $\mathcal{A}$ является матрицей полного ранга по столбцам;

в) линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ задает биективное отображение тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$ и при любом выборе базисов пространств V и W матрица оператора $\mathcal{A}$ невырождена. Показать, что в этом случае оператор $\mathcal{A}$ является изоморфизмом между V и W.

54.3. Найти образ и ядро линейного оператора $\mathcal{A}$ в геометрическом пространстве V_3, если:

а) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$; б) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, [\mathbf{x}, \mathbf{b}]]$,

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – заданные ненулевые векторы.

Для следующих линейных преобразований арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ построить базисы образа и ядра, найти ранг и дефект.

54.4. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

54.5. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

54.6. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

54.7. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 8x_2 - 8x_3, 4x_1 + x_2 - x_3)$.

54.8. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 3x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_3, -x_1 + 2x_2)$.

54.9. Линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, задан матрицей A в паре естественных базисов пространств. Найти образ вектора a, если:

1) $m = 3$, $n = 4$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a = (4, -1, -1, 3)$;

2) $m = 4$, $n = 4$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $a = (-1, 1, 1, -1)$;

3) $m = 5$, $n = 4$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $a = (-2, 1, 3, -1)$.

54.10. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве V, задан матрицей A в некотором базисе e. Найти его ядро и образ и выяснить, является ли этот оператор изоморфизмом, если:

1) $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{bmatrix}$;

2) $n = 3$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$;

3) $n=3$, $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

4) $n=4$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

5) $n=4$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

6) $n=5$, $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

54.11. Линейный оператор A, действующий из n-мерного пространства V в m-мерное пространство W, задан матрицей A в некоторой паре базисов e и f пространств V и W соответственно. Найти его ядро и образ и выяснить, задает ли данный оператор сюръективное, инъективное отображение, если:

1) $m=3$, $n=4$, $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -11 & 3 \end{bmatrix}$;

2) $m=4$, $n=3$, $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}$;

3) $m=4$, $n=3$, $A=\begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$;

4) $m=2$, $n=5$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$;

5) $m=5$, $n=3$, $A=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{bmatrix}$;

6) $m=3$, $n=5$, $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

54.12. Найти ранг оператора $\mathcal{F}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ по правилу

$$\mathcal{F}X=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}X+X\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

54.13. Доказать, что ранг оператора $\mathcal{C}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ по правилу $\mathcal{C}X=[X,A]$, где A – заданная матрица, не превосходит 2.

54.14. Доказать, что ранг оператора $\mathcal{G}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по правилу $\mathcal{G}X=AX$, где A – заданная матрица, равен $n\operatorname{rg}A$.

54.15. Доказать, что ранг оператора $\mathcal{G}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по правилу $\mathcal{G}X=XB$, где B – заданная матрица, равен $n\operatorname{rg}B$.

54.16. Доказать, что ранг оператора $\mathcal{A}$, ставящего в соответствие каждой квадратной матрице $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ кронекерово произведение $X\otimes B$ с заданной матрицей $B\in\mathbb{R}^{m\times k}$, равен $n^2\operatorname{rg}B$.

54.17. Описать образ и ядро оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ в пространстве M_n.

54.18. Описать образ и ядро разностного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве M_n, действующего по правилу

$$\mathcal{A}f(t)=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

54.19. Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует из пространства M_n в пространство $\mathbb{R}^k$ по правилу $\mathcal{A}f(t)=(f(a_1),\dots,f(a_k))$, где $a_1,\dots,a_k$ – различные числа. Найти дефект этого оператора.

54.20. Описать образ и ядро оператора $\mathcal{A}$ в пространстве M_n, действующего по правилу

$$\mathcal{A}f(t)=\frac{f(a+t)-f(a-t)}{2t},$$

где $a\in\mathbb{R}$ – заданное число.

54.21. Найти дефект линейного функционала f в n-мерном пространстве V.

54.22. Для каждого из линейных функционалов геометрического пространства V_3, действующих по правилам $f_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$ и $f_2(\mathbf{x}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{x}], \mathbf{b})$, найти ядро ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – заданные ненулевые векторы).

54.23. Пусть f_1, f_2 – два линейных функционала в линейном пространстве V, причем $f_1(x)f_2(x) = 0$ для всех $x \in V$. Доказать, что один из функционалов нулевой.

54.24. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ – линейные функционалы в линейном пространстве V над бесконечным полем. Доказать, что если $f_1(x) \ldots f_k(x) = 0$ для всех $x \in V$, то один из функционалов нулевой.

54.25. Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует из V в W, а y – произвольный вектор, принадлежащий его образу. Доказать, что *полный прообраз* вектора y, т.е. множество всех векторов $x \in V$, для которых $\mathcal{A}x = y$, образует линейное аффинное многообразие пространства V с направляющим подпространством $\ker \mathcal{A}$.

54.26. Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует из V в W, а подпространство L удовлетворяет включению: $L \subset \operatorname{im} \mathcal{A}$. Доказать, что множество векторов $x \in V$, образы которых принадлежат L, (т.е. *полный прообраз подпространства* L) также является подпространством, и его размерность равна $\dim L + \operatorname{def} \mathcal{A}$.

54.27. Линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, задан в паре естественных базисов пространств матрицей A. Найти полный прообраз вектора y, если:

1) $n = 4$, $m = 3$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$, $y = (-1, 0, 1)$;

2) $n = 5$, $m = 3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{bmatrix}$, $y = (1, 2, 1)$;

3) $n = 3$, $m = 5$, $A = \begin{bmatrix} 30 & 9 & 4 \\ -24 & -15 & 2 \\ 43 & 8 & 9 \\ -50 & 5 & -20 \\ -5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $y = (4, 2, 9, -20, -3)$;

4) $n=4$, $m=5$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $y=(0,1,1,2,-1)$.

54.28. Линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, задан в паре естественных базисов пространств матрицей A. Найти полный прообраз подпространства $L \subset \mathbb{R}^m$, если:

1) $n=5$, $m=2$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, L натянуто на вектор $(3,-1)$;

2) $n=4$, $m=3$, $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & 4 & 2 \\ 9 & -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, L задано в естественном базисе системой уравнений $x_1+x_2=0$, $x_1-x_3=0$;

3) $n=m=6$, $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, L задано в естественном базисе системой уравнений $2x_1-x_3-x_5=0$, $x_1+x_2-x_4=0$, $-x_2+2x_4-x_6=0$.

54.29. Пусть линейное преобразование пространства всех многочленов от t переводит каждый многочлен t^k в t^{2k} $(k=0,1,2,\ldots)$. Убедиться в том, что это преобразование инъективно, но не сюръективно. Найти его образ.

54.30. Найти образ и ядро линейного оператора умножения матриц пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$:

1) на матрицу $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ слева;

2) на матрицу $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ справа.

54.31. Для каждой матрицы $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ обозначим через $Y \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$ матрицу, составленную из первых $n-1$ столбцов матрицы X. Определим отображение $\mathcal{A}$ равенством $\mathcal{A}X=Y$. Доказать, что отображение $\mathcal{A}$ линейно, найти его ядро и образ.

54.32. Пусть $A_1,\ldots,A_n$ – заданные квадратные матрицы по-

рядка m. Отображение $\mathcal{A}$ каждому вектору $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие матрицу $\mathcal{A}x = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$.

1) Доказать линейность отображения $\mathcal{A}$.

2) Найти ядро и образ этого отображения, если $n = 4$ и

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

54.32.1. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – заданные векторы линейного пространства V над полем P. Отображение $\mathcal{A}$ каждому вектору $x = (x_1, \ldots, x_k) \in P^k$ ставит в соответствие вектор $\mathcal{A}x = x_1a_1 + \ldots + x_ka_k$.

1. Показать, что отображение $\mathcal{A}$ линейно.

2. Доказать, что ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое тогда и только тогда, когда система заданных векторов линейно независима.

3. Показать, что $\operatorname{im}\mathcal{A} = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$.

4. Доказать, что дефект оператора $\mathcal{A}$ равен $k - \operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_k)$.

54.33. Для оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ построить взаимно однозначное соответствие между его образом $\operatorname{im}\mathcal{A}$ и линейными многообразиями пространства V вида $P = x_0 + \ker\mathcal{A}$.

54.34. Множество M всех плоскостей пространства V вида $P = x_0 + \ker\mathcal{A}$ является согласно задаче 46.34 линейным пространством (фактор-пространством пространства V по подпространству $\ker\mathcal{A}$). Доказать, что соответствие между многообразиями из M и векторами из $\operatorname{im}\mathcal{A}$, построенное в предыдущей задаче, является линейным оператором. Найти ядро и дефект этого оператора.

54.35. Пусть V – линейное пространство. Доказать, что всякое линейное подпространство из V служит:

а) ядром некоторого линейного оператора в V;

б) образом некоторого линейного оператора в V.

54.36. Доказать, что для любой ненулевой линейной формы f в n-мерном пространстве V над полем P существует базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, такой, что равенство

$$f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1$$

выполнено для любых чисел $x_1, \ldots, x_n \in P$.

54.37. Привести пример линейного оператора, действующего в пространстве V, для которого пространство V не является прямой суммой образа и ядра этого оператора.

54.38. Пусть L – любое подпространство, дополнительное к ядру $\ker\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$. Доказать, что:

а) любая линейно независимая система векторов из L переводится оператором $\mathcal{A}$ в линейно независимую систему;

б) подпространство L отображается оператором $\mathcal{A}$ взаимно однозначно на его образ $\operatorname{im}\mathcal{A}$.

54.39. Доказать, что для любых двух подпространств: N в n-мерном пространстве V и T в пространстве W, таких, что $\dim N + \dim T = n$, найдется линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, для которого ядро совпадает с N, а образ с T.

54.40. В пространстве M_n построить два различных линейных оператора, имеющих одни и те же образ и ядро.

54.41. В естественных базисах арифметических пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу A. Найти каноническую пару базисов в каждом из следующих случаев:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$,

3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,

6) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & -10 \end{bmatrix}$.

§55. Линейное пространство линейных операторов

Пусть V и W – линейные пространства над полем P.

Суммой линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется отображение $\mathcal{A} + \mathcal{B} : V \to W$, выполняемое по правилу

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x, \quad \forall x \in V.$$

Произведением линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ *на число* $\alpha \in P$ называется отображение $\alpha\mathcal{A} : V \to W$, выполняемое по правилу

$$(\alpha\mathcal{A})x = \alpha\mathcal{A}x, \quad \forall x \in V.$$

Теорема 55.1. *Для любых операторов* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ *и числа* $\alpha \in P$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W), \quad \alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W).$$

Следствие. Сложение операторов и умножение оператора на число являются внутренним и внешним законами композиции на множестве $\mathcal{L}(V, W)$.

Теорема 55.2. *Множество $\mathcal{L}(V,W)$ – линейное пространство над полем P относительно введенных выше операций.*

Теорема 55.3. *При сложении операторов их матрицы складываются, при умножении оператора на число его матрица умножается на это число, т.е. если e и f – базисы пространств V и W, то*

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})_{fe} = A_{fe} + B_{fe}, \quad (\alpha\mathcal{A})_{fe} = \alpha A_{fe}.$$

Теорема 55.4. *Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то линейное пространство $\mathcal{L}(V,W)$ изоморфно пространству матриц $P^{m\times n}$.*

Следствие. $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

ЗАДАЧИ

55.1. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $a_1 = (-3,7)$, $a_2 = (1,-2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, а оператор $\mathcal{B}$ в базисе $b_1 = (6,-7)$, $b_2 = (-5,6)$ – матрицу $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}+\mathcal{B}$:

а) в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^2$;

б) в базисе a_1, a_2;

в) в базисе b_1, b_2.

55.2. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в трехмерном пространстве, переводит векторы базиса e_1, e_2, e_3 в векторы a_1, a_2, a_3, координаты которых в этом базисе равны $(-2,-1,-2)$, $(11,7,1)$, $(-6,-4,-1)$ соответственно. Линейный оператор $\mathcal{B}$ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3, координаты которых в том же базисе e равны $(1,5,0)$, $(3,4,-3)$, $(-1,-1,2)$ соответственно. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}-3\mathcal{B}$ в базисе e_1, e_2, e_3.

55.3. Линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующие в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$, переводят векторы $a_1 = (1,1-1)$, $a_2 = (2,0,1)$, $a_3 = (2,-5,6)$ соответственно в векторы $b_1 = (0,-2,2)$, $b_2 = (1,1,1)$, $b_3 = (-2,4,-7)$ и $c_1 = (1,3,-3)$, $c_2 = (0,1,-1)$, $c_3 = (3,8,2)$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

55.4. Пусть линейное пространство V является прямой суммой двух ненулевых подпространств L_1 и L_2. Показать, что единичный оператор пространства V представим в виде суммы $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, где $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – операторы проектирования пространства V на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1 соответственно.

55.5. Доказать, что для произвольных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ выполнено:

а) $\operatorname{im}\lambda\mathcal{A} = \operatorname{im}\mathcal{A}$, если $\lambda \neq 0$;

б) $\operatorname{im}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \subset \operatorname{im}\mathcal{A} + \operatorname{im}\mathcal{B}$.

Привести пример, когда включение пункта б) является строгим.

55.6. Доказать, что для произвольных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ выполнено:

а) $\ker\lambda\mathcal{A} = \ker\mathcal{A}$, если $\lambda \neq 0$;

б) $\ker(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \supset \ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B}$.

Привести пример, когда включение пункта б) является строгим.

55.7. Доказать, что если операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ таковы, что $\ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B} = V$, то выполнено равенство

$$\operatorname{im}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \operatorname{im}\mathcal{A} + \operatorname{im}\mathcal{B}.$$

Является ли условие $\ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B} = V$ необходимым для справедливости этого равенства?

55.8. Доказать, что если операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ таковы, что $\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \operatorname{im}\mathcal{B} = \{\theta\}$, то выполнено равенство

$$\ker(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B}.$$

Является ли условие $\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \operatorname{im}\mathcal{B} = \{\theta\}$ необходимым для справедливости этого равенства?

55.9. Доказать, что ненулевые операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$, образы которых различны, линейно независимы.

55.10. Ненулевые операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, W)$ таковы, что их образы попарно различны. Верно ли, что эти операторы линейно независимы?

55.11. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ – базис пространства W, g – ненулевой вектор пространства V. Доказать, что операторы $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ такие, что $\mathcal{B}_j g = f_j$, $j = \overline{1,m}$, линейно независимы.

55.12. В пространстве W задан базис $f_1, \ldots, f_m$. Доказать, что для всякого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ найдутся операторы $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ такие, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 + \ldots + \mathcal{B}_m$, причем:

а) ранг каждого из операторов $\mathcal{B}_j$ не превосходит единицы;

б) образ каждого ненулевого оператора $\mathcal{B}_j$ есть линейная оболочка, натянутая на вектор f_j.

55.13. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, а g – некоторый ненулевой вектор пространства. Доказать, что операторы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, заданные на базисе e равенствами

$$\mathcal{A}_j e_k = \begin{cases} g, & k = j, \\ \theta, & k \neq j, \end{cases}$$

линейно независимы.

55.14. Доказать, что всякий оператор ранга 1, образ которого содержит вектор g, есть линейная комбинация операторов $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, введенных в предыдущей задаче.

55.15. Пусть в пространствах V и W заданы соответственно базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$. Используя результаты предыдущих задач, показать, что всякий оператор, действующий из V в W, есть линейная комбинация операторов $\mathcal{A}_{11}, \ldots, \mathcal{A}_{mn}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\mathcal{A}_{ij}e_k = \begin{cases} f_i, & k = j, \\ \theta, & k \neq j, \end{cases} \qquad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

55.16. Показать, что система операторов $\mathcal{A}_{ij}$, введенных в предыдущей задаче, линейно независима. Вывести отсюда, что эти операторы образуют базис пространства $\mathcal{L}(V, W)$.

55.17. Выяснить, образует ли данное множество линейных операторов линейное подпространство в $\mathcal{L}(V, W)$:

а) множество всех операторов ранга $k \geq 1$;

б) множество всех операторов ранга, не превосходящего числа $k \geq 1$;

в) множество всех инъективных отображений;

г) множество всех сюръективных отображений.

55.18. Будет ли линейным подпространством пространства $\mathcal{L}(V, W)$ множество всех операторов, имеющих:

а) один и тот же образ; б) одно и то же ядро?

55.19. Показать, что если T – подпространство пространства W, то множество всех линейных операторов, образы которых содержатся в T, является подпространством пространства $\mathcal{L}(V, W)$. Найти его размерность, если $\dim V = n$, $\dim T = k$.

55.20. Показать, что если N – подпространство пространства V, то множество всех линейных операторов из $\mathcal{L}(V, W)$, ядро которых содержит N, является подпространством пространства $\mathcal{L}(V, W)$. Найти размерность этого подпространства, если $\dim V = n$, $\dim N = l$, $\dim W = m$.

55.21. Пусть L_1 и L_2 – произвольные подпространства пространства W, причем $L = L_1 + L_2$, $L_0 = L_1 \cap L_2$. Доказать следующие соотношения:

а) $\mathcal{L}(V, L) = \mathcal{L}(V, L_1) + \mathcal{L}(V, L_2)$;

б) $\mathcal{L}(V, L_0) = \mathcal{L}(V, L_1) \cap \mathcal{L}(V, L_2)$.

55.22. Пусть пространство W разложено в прямую сумму подпространств $L_1, \ldots, L_k$. Доказать, что

$$\mathcal{L}(V,W) = \mathcal{L}(V,L_1) \oplus \mathcal{L}(V,L_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(V,L_k).$$

55.23. Доказать, что ранг суммы операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ не превосходит суммы рангов этих операторов:

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \leq \operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{rg}\mathcal{B}.$$

55.24. Пусть операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,V)$ таковы, что

$$V = \operatorname{im}\mathcal{A} \oplus \operatorname{im}\mathcal{B} = \ker\mathcal{A} \oplus \ker\mathcal{B}.$$

Доказать, что ранг суммы $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ этих операторов равен сумме рангов $\operatorname{rg}\mathcal{A}$ и $\operatorname{rg}\mathcal{B}$.

55.24.1. Доказать, что утверждение предыдущей задачи останется верным, если предположить, что

$$V = \ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B}, \quad \operatorname{im}\mathcal{A} \cap \operatorname{im}\mathcal{B} = \{\theta\}.$$

55.25. Показать, что для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ выполнено соотношение

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \geq |\operatorname{rg}\mathcal{A} - \operatorname{rg}\mathcal{B}|.$$

55.25.1. Доказать, что правило $\rho(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}-\mathcal{B})$ задает в пространстве $\mathcal{L}(V,W)$ метрику.

55.26. Пусть V – некоторое линейное пространство, а k_1 и k_2 – натуральные числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq k_1, k_2 \leq \dim V$, $k_1+k_2 \leq \dim V$. Для каждого натурального числа k: $|k_1 - k_2| \leq k \leq k_1 + k_2$ привести пример операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,V)$, для которых $\operatorname{rg}\mathcal{A} = k_1$, $\operatorname{rg}\mathcal{B} = k_2$, $\operatorname{rg}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = k$.

55.27. Доказать, что любой оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ ранга r может быть представлен в виде суммы r операторов ранга 1, но не может быть представлен в виде суммы менее чем r таких операторов.

55.28. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы сумма двух операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ранга 1 была оператором ранга не больше единицы.

55.29. Пространство V имеет размерность $n > 1$. Доказать, что в пространстве $\mathcal{L}(V,V)$ всякое подпространство L размерности $n+1$ содержит хотя бы один оператор ранга больше единицы.

55.30. Пусть операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ таковы, что для любого вектора $x \in V$ векторы $\mathcal{A}x$ и $\mathcal{B}x$ коллинеарны. Значит ли это, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коллинеарны?

55.31. В условиях предыдущей задачи дополнительно предположить, что ранг оператора $\mathcal{B}$ равен размерности пространства V. Коллинеарны ли операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в этом случае?

55.32. Доказать, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ранга 1, имеющие один

и тот же образ T и одно и то же ядро N, коллинеарны.

55.33. Доказать, что если два линейных функционала имеют одинаковые ядра, то они коллинеарны.

55.34. Доказать, что n линейных функционалов на n-мерном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер есть нулевое подпространство.

55.35. Доказать, что формы $\varphi_0(f) = f(a)$, $\varphi_1(f) = f'(a), \ldots,$ $\varphi_n(f) = f^{(n)}(a)$ при любом $a \in \mathbb{R}$ образуют базис в пространстве $\mathcal{L}(M_n, \mathbb{R})$.

55.36. Доказать, что формы $\varphi_0(f) = f(a_0)$, $\varphi_1(f) = f(a_1), \ldots,$ $\varphi_n(f) = f(a_n)$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – произвольные попарно различные действительные числа, образуют базис в пространстве $\mathcal{L}(M_n, \mathbb{R})$.

55.37. Доказать, что формы $\varphi_k(f) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$, $k = \overline{0,n}$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ – произвольные действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n+1}$, образуют базис в пространстве $\mathcal{L}(M_n, \mathbb{R})$.

55.38. Доказать, что для любого проектора $\mathcal{P}$ оператор $\mathcal{I} - \mathcal{P}$ также является проектором. Найти соотношения, связывающие ядро и образ оператора $\mathcal{I} - \mathcal{P}$ с ядром и образом оператора $\mathcal{P}$.

55.39. Доказать, что если $\mathcal{P}$ – оператор проектирования пространства V на L_1 параллельно L_2, то оператор $\mathcal{R} = \mathcal{I} - 2\mathcal{P}$ является оператором отражения.

55.40. Показать, что изоморфизм φ между линейными пространствами $\mathcal{L}(V, W)$ и $P^{n\times m}$, где V и W – произвольные линейные пространства над общим полем P размерностей n и m соответственно, сам является линейным оператором. Показать, что этот оператор в некоторой паре базисов этих пространств имеет единичную матрицу.

§56. Умножение линейных операторов. Обратный оператор

Пусть V, W, Z – линейные пространства над полем P. *Произведением линейных операторов* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$ называется отображение $\mathcal{BA} : V \to Z$, выполняемое по правилу

$$(\mathcal{BA})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x), \quad \forall x \in V.$$

Теорема 56.1. *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$, *то* $\mathcal{BA} \in \mathcal{L}(V, Z)$.

Теорема 56.2. *Операция умножения линейных операторов обладает следующими свойствами:*

1) $(AB)C = A(BC)$ *(ассоциативность),*

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

3) $(A+B)C = AC + BC$,

$A(B+C) = AB + AC$ *(дистрибутивность),*

выполненными для любых операторов A, B, C, *для которых левые части равенств имеют смысл.*

Теорема 56.3. *При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т.е. если* e, f, g *– базисы пространств* V, W, Z, *то*

$$(BA)_{ge} = B_{gf} A_{fe}.$$

Во множестве $\mathcal{L}(V, V)$ всех линейных операторов, действующих в пространстве V, для любых операторов выполнимы операции сложения, умножения на число и умножения операторов друг на друга. Как следует из общей теории линейных операторов,

1) $\mathcal{L}(V, V)$ – *линейное пространство над полем* P;

2) $\mathcal{L}(V, V)$ – *некоммутативное кольцо с единицей.*

Линейное пространство над полем P, которое является кольцом и для любых своих элементов A, B удовлетворяет условию

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \quad \forall \alpha \in P,$$

называется *алгеброй* (или *линейной алгеброй*) *над полем* P. Размерность линейного пространства при этом называется также *размерностью алгебры*. Таким образом, $\mathcal{L}(V, V)$ – *алгебра над полем* P.

Как и в любом кольце, оператор $A \in \mathcal{L}(V, V)$ можно возводить в степень $n \in \mathbb{N}$, и если $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – произвольный многочлен над полем P от переменной t, то однозначно определен оператор

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n, \tag{56.1}$$

называемый *многочленом от оператора* A. Из свойств матрицы линейного оператора следует, что матрицей многочлена (56.1) от оператора A является тот же многочлен от матрицы A_e: $(p(A))_e = p(A_e)$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $A^{-1} : V \to V$ называется *обратным оператором* к оператору A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathcal{I}.$$

Теорема 56.4. *Линейный оператор* $A \in \mathcal{L}(V, V)$ *обратим тогда и только тогда, когда он биективен.*

Теорема 56.5. *Обратный оператор единствен.*

Теорема 56.6. *Матрица обратного оператора* A^{-1} *в произвольном базисе является обратной к матрице оператора* A *в этом же базисе.*

Оператор $A \in \mathcal{L}(V, V)$ называется *невырожденным*, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т.е.

$$\ker A = \{0\},$$

и *вырожденным* в противном случае.

Теорема 56.7. *В конечномерном пространстве* V *следующие утверждения равносильны: для* $A \in \mathcal{L}(V, V)$

1) $AA^{-1} = \mathcal{I}$;

2) $A^{-1}A = \mathcal{I}$;

3) A *не вырожден;*

4) $\operatorname{Im} A = V$;

5) $\det \mathcal{A} \neq 0$;
6) $\mathcal{A}$ *обратим*;
7) $\mathcal{A}$ *биективен.*

Теорема 56.8. *Произведение обратимых операторов обратимо, при этом*

$$(\mathcal{AB})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

Следствие 1. *Умножение линейных операторов является алгебраической операцией на множестве всех обратимых операторов, действующих в пространстве* V.

Следствие 2. *Множество всех обратимых линейных операторов из* $\mathcal{L}(V, V)$ *образует неабелеву мультипликативную группу.*

ЗАДАЧИ

56.1. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, а оператор $\mathcal{B}$ в базисе $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ – матрицу $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathcal{AB}$:

а) в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^2$;
б) в базисе a_1, a_2;
в) в базисе b_1, b_2.

56.2. В пространстве M_3 заданы два оператора. Оператор $\mathcal{A}$ всякий многочлен $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ переводит в многочлен $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Оператор $\mathcal{B}$ многочлены $t^3 + t^2$, $t^3 + t$, $t^3 + 1$, $t^3 + t^2 + t + 1$ переводит соответственно в $t^3 + t$, $t^3 + 1$, $t^3 + t^2 + t + 1$ и нулевой многочлен. В базисе $1, t, t^2, t^3$ составить матрицы операторов $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$.

56.3. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 в некотором базисе трехмерного пространства V образуют соответственно матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Линейный оператор $\mathcal{F}$ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейный оператор $\mathcal{G}$ переводит векторы b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3. Найти матрицу преобразования $\mathcal{GF}$:

а) в базисе, в котором заданы координаты всех векторов;
б) в базисе a_1, a_2, a_3;
в) в базисе b_1, b_2, b_3.

56.4. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – линейные операторы, действующие в пространстве $\mathbb{R}^2$, причем $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A_e = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ в естественном базисе e_1, e_2, а $\mathcal{B}$ – матрицу $B_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ в базисе $f_1 = (1,3)$, $f_2 = (-1,-2)$. Найти матрицы следующих операторов:

а) $\mathcal{A}^2 - 6\mathcal{A} + 9\mathcal{I}$ в базисе e;

б) $\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{B} + 4\mathcal{I}$ в базисе e;

в) $\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2$ в базисе e;

г) $4\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}$ в базисе f;

д) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^4$ в базисе $g_1 = (1,2)$, $g_2 = (0,-1)$.

56.5. Доказать, что всякое линейное отображение представимо в виде произведения сюръективного и инъективного линейных отображений.

56.6. Верно ли, что перестановочность операторов является отношением эквивалентности на множестве операторов, действующих в пространстве V?

56.7. Показать, что всякий оператор отражения $\mathcal{R}$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{R}^2 = \mathcal{I}$.

56.8. Показать, что всякий проектор $\mathcal{P}$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

56.9. Доказать, что, наоборот, всякий оператор $\mathcal{P}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, является проектором.

56.10. Показать, что из условий $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}$, $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{O}$ следует, что:

а) $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ – проекторы;

б) $\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = \mathcal{O}$.

56.11. Пусть $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования, действующий в пространстве многочленов M_n. Показать, что $\mathcal{D}^{n+1} = \mathcal{O}$.

56.12. Пусть $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования, действующий в пространстве многочленов M_n. Найти матрицу оператора $\mathcal{D}^k$ в базисе $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2/2!, \ldots, e_{n+1} = t^n/n!$.

56.13. В пространстве всех многочленов от переменной t рассматриваются линейные операторы: $\mathcal{A}$ – умножения на t и $\mathcal{D}$ – дифференцирования. Найти:

а) оператор $\mathcal{A}\mathcal{D}$;

б) оператор $\mathcal{D}\mathcal{A}$;

в) коммутатор $[\mathcal{D}, \mathcal{A}] = \mathcal{D}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{D}$.

56.14. Для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$, рассмотренных в предыдущей задаче, доказать равенство $[\mathcal{D}^k, \mathcal{A}] = k\mathcal{D}^{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$.

56.15. Доказать, что коммутатор $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$ двух линейных операторов, действующих в конечномерном линейном пространстве над бесконечным полем, не может быть единичным оператором. Объяснить, как это утверждение согласуется с результатом пункта в) задачи 56.13.

56.16. Доказать, что если $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ – вырожденный оператор.

56.17. Показать, что любые два многочлена от одного оператора $\mathcal{A}$ перестановочны.

56.18. Показать, что множество всех многочленов от заданного оператора $\mathcal{A}$ образует коммутативную алгебру.

56.19. Показать, что если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны, то перестановочны и любые многочлены $f(\mathcal{A})$ и $g(\mathcal{B})$ от этих операторов.

56.20. Доказать, что для перестановочных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выполнено соотношение

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^n = \mathcal{A}^n + n\mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B} + \frac{n(n-1)}{2}\mathcal{A}^{n-2}\mathcal{B}^2 + \ldots + \mathcal{B}^n.$$

56.21. Доказать, что операторы ранга 1, имеющие одинаковое ядро и одинаковый образ, перестановочны.

56.22. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны. Доказать, что $\ker \mathcal{A}$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B} \ker \mathcal{A} \subset \ker \mathcal{A}$.

56.23. Доказать, что если проекторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ перестановочны, то их произведение также является проектором. При этом:

а) $\operatorname{im} \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \operatorname{im} \mathcal{P}_1 \cap \operatorname{im} \mathcal{P}_2$;

б) $\ker \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \ker \mathcal{P}_1 + \ker \mathcal{P}_2$.

56.24. Доказать, что произведение $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ проекторов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ также является проектором тогда и только тогда, когда коммутатор $[\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1]$ отображает подпространство $\operatorname{im} \mathcal{P}_2$ в подпространство $\ker \mathcal{P}_1$. При этом:

а) $\operatorname{im} \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \operatorname{im} \mathcal{P}_1 \cap (\operatorname{im} \mathcal{P}_2 + \ker \mathcal{P}_1 \cap \ker \mathcal{P}_2)$;

б) $\ker \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \ker \mathcal{P}_2 + \ker \mathcal{P}_1 \cap (\operatorname{im} \mathcal{P}_1 + \operatorname{im} \mathcal{P}_2)$.

56.25. Доказать, что если произведение проекторов $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{P}_k$ не меняется при циклических перестановках сомножителей, то оно также является проектором, причем

$$\operatorname{im} \mathcal{P} = \operatorname{im} \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \operatorname{im} \mathcal{P}_k, \quad \ker \mathcal{P} = \ker \mathcal{P}_1 + \ldots + \ker \mathcal{P}_k.$$

56.26. Доказать, что сумма проекторов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ также является проектором тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = \mathcal{O}$. При этом:

а) $\operatorname{im}(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = \operatorname{im}\mathcal{P}_1 \oplus \operatorname{im}\mathcal{P}_2$;

б) $\ker(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = \ker\mathcal{P}_1 \cap \ker\mathcal{P}_2$.

56.27. Пусть проекторы $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ удовлетворяют условиям: $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$. Доказать, что в этом случае их сумма $\mathcal{P}_1 + \ldots + \mathcal{P}_k$ также является проектором.

56.28. Операторы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ в пространстве V размерности n таковы, что $\mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_k = \mathcal{I}$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) все операторы $\mathcal{A}_i$ являются проекторами;

б) $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{O}$ при всех $i \neq j$;

в) $\operatorname{rg}\mathcal{A}_1 + \ldots + \operatorname{rg}\mathcal{A}_k = n$.

56.29. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$ перестановочен с каждым оператором из $\mathcal{L}(V, V)$, то $\mathcal{A}L \subset L$ для любого подпространства L из V. В частности, для любого вектора $x \in V$ векторы x и $\mathcal{A}x$ коллинеарны.

56.30. Пользуясь предыдущей задачей, доказать *лемму Шура*: если оператор $\mathcal{A}$ перестановочен с каждым оператором из $\mathcal{L}(V, V)$, то он – скалярный.

56.31. Доказать, что для произведения $\mathcal{B}\mathcal{A}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ справедливы неравенства:

а) $\operatorname{rg}\mathcal{B}\mathcal{A} \leq \min(\operatorname{rg}\mathcal{A}, \operatorname{rg}\mathcal{B})$;

б) $\operatorname{def}\mathcal{B}\mathcal{A} \geq \operatorname{def}\mathcal{A}$;

в) $\operatorname{def}\mathcal{B}\mathcal{A} \geq \operatorname{def}\mathcal{B}$ (если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в одном пространстве).

56.32. Доказать, что для произведения $\mathcal{B}\mathcal{A}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выполнены равенства:

а) $\operatorname{rg}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \operatorname{rg}\mathcal{A} - \dim(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$;

б) $\operatorname{def}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \operatorname{def}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$.

56.33. Доказать, что для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнены равенства

$$\operatorname{def}\mathcal{A}^{n+1} = \operatorname{def}\mathcal{A} + \sum_{k=1}^{n} \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}^k \cap \ker\mathcal{A}),$$

$$\operatorname{rg}\mathcal{A}^{n+1} = \operatorname{rg}\mathcal{A} - \sum_{k=1}^{n} \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}^k \cap \ker\mathcal{A}).$$

56.34. Доказать, что произведение $\mathcal{BA}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{def}(\mathcal{BA}) \leq \operatorname{def}\mathcal{A} + \operatorname{def}\mathcal{B}.$$

56.35. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – такие линейный операторы, что произведение $\mathcal{BAC}$ определено. Доказать, что справедливо *неравенство Фробениуса:*

$$\operatorname{rg}(\mathcal{BA}) + \operatorname{rg}\mathcal{AC} \leq \operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{rg}\mathcal{BAC}.$$

56.36. Доказать, что для всякого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, ранг которого равен 1, найдется число α такое, что $\mathcal{A}^2 = \alpha\mathcal{A}$.

56.37. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W,Z)$ – линейные отображения и $\dim W = m$. Доказать, что:

а) $\operatorname{rg}\mathcal{BA} \geq \operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{rg}\mathcal{B} - m$ (*неравенство Сильвестра*);

б) если $\mathcal{BA} = \mathcal{O}$, то $\operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{rg}\mathcal{B} \leq m$.

56.38. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ – произвольный линейный оператор. Доказать, что для любого натурального числа k, удовлетворяющего условию $\operatorname{rg}\mathcal{A} \leq k \leq \dim V$, существует линейный оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,V)$ такой, что $\mathcal{BA} = \mathcal{O}$ и $\operatorname{rg}\mathcal{B} + \operatorname{rg}\mathcal{A} = k$.

56.39. Доказать, что для любых двух перестановочных линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеет место включение

$$\ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B} \subset \ker\mathcal{AB}.$$

Привести пример, когда это включение является строгим.

56.40. Доказать, что если перестановочные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таковы, что $\ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B} = \{\theta\}$, то справедливо равенство

$$\ker\mathcal{AB} = \ker\mathcal{A} \oplus \ker\mathcal{B}.$$

56.41. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве, удовлетворяет соотношению $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$. Доказать, что:

а) $\operatorname{rg}(\mathcal{A}+\mathcal{I}) + \operatorname{rg}(\mathcal{A}-\mathcal{I}) = n$;

б) $\operatorname{def}(\mathcal{A}+\mathcal{I}) + \operatorname{def}(\mathcal{A}-\mathcal{I}) = n$.

56.42. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,V)$ таковы, что $\mathcal{BA} = \mathcal{O}$. Следует ли отсюда, что $\mathcal{AB} = \mathcal{O}$?

56.43. Привести пример двух ненулевых операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, таких, что $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = \mathcal{O}$.

56.44. Доказать, что если $\operatorname{rg}\mathcal{A} = 1$ и $\operatorname{tr}\mathcal{AB} = 0$, то $\mathcal{ABA} = \mathcal{O}$.

56.45. Пусть $\mathcal{A}$ – заданный линейный оператор, действующий в линейном пространстве V. Доказать, что множество всех линейных операторов $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,V)$, удовлетворяющих условию $\mathcal{AB} = \mathcal{O}$, является подпространством пространства $\mathcal{L}(V,V)$. Най-

ти размерность этого подпространства, если $\dim V = n$ и ранг оператора $\mathcal{A}$ равен r.

56.46. Тот же вопрос для множества операторов $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, V)$, удовлетворяющих условию $\mathcal{CA} = \mathcal{O}$.

56.47. Пусть V – $2m$-мерное пространство над бесконечным полем. В пространстве $\mathcal{L}(V, V)$ указать подпространство размерности m^2+1, состоящее из попарно перестановочных операторов.

56.48. Пусть V – n-мерное пространство, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – заданный оператор ранга r. Преобразование пространства $\mathcal{L}(V, V)$ каждому оператору $\mathcal{X}$ ставит в соответствие оператор $\mathcal{AX}$. Доказать, что это преобразование является линейным. Найти его ранг и дефект.

56.49. Пусть V – n-мерное пространство, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – заданный ненулевой оператор. Преобразование δ пространства $\mathcal{L}(V, V)$ каждому оператору $\mathcal{X}$ ставит в соответствие его коммутатор $[\mathcal{A}, \mathcal{X}]$. Доказать, что это преобразование является линейным. Показать, что преобразование δ обладает следующими свойствами:

а) δ является вырожденным и его ядро содержит все операторы, перестановочные с $\mathcal{A}$;

б) если $f(\mathcal{A})$ – многочлен от оператора $\mathcal{A}$, то $\delta f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$;

в) для любых операторов $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнено соотношение

$$\delta(\mathcal{BC}) = (\delta\mathcal{B})\,\mathcal{C} + \mathcal{B}\,(\delta\mathcal{C});$$

г) для любого оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнено соотношение

$$\delta(\mathcal{B}^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{B}^k(\delta\mathcal{B})\mathcal{B}^{n-1-k};$$

д) для любого обратимого оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнено соотношение

$$\delta(\mathcal{B}^{-1}) = -\mathcal{B}^{-1}(\delta\mathcal{B})\,\mathcal{B}^{-1};$$

е) для любых перестановочных операторов $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнено соотношение

$$\delta(\mathcal{CB}^{-1}) = \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(\delta\mathcal{C}) - \mathcal{C}(\delta\mathcal{B}))\mathcal{B}^{-1}.$$

56.50. Показать, что если $\mathcal{A}$ – невырожденный оператор, то для любого подпространства L имеет место равенство $\dim \mathcal{A}L = \dim L$.

56.51. Пространство V является прямой суммой подпрост-

ранств $L_1, \ldots, L_k$. Пусть $\mathcal{A}_i$ – невырожденный оператор, заданный на подпространстве L_i, $i = \overline{1,k}$. Показать, что оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, совпадающий на каждом из подпространств L_i с соответствующим оператором $\mathcal{A}_i$, также будет невырожденным.

56.52. Проверить, что оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ является:

а) вырожденным в пространстве многочленов M_n ;

б) невырожденным на двумерном линейном пространстве, натянутом на функции $f_1 = \cos t$ и $f_2 = \sin t$ (с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число).

56.53. Найти обратный оператор для оператора дифференцирования пункта б) предыдущей задачи.

56.54. Найти обратный для оператора отражения $\mathcal{R}$.

56.55. Показать, что для невырожденного оператора $\mathcal{A}$ и любого числа α, отличного от нуля, выполнено равенство

$$(\alpha\mathcal{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

56.56. Доказать, что если $\mathcal{A}$ – оператор ранга 1, то хотя бы один из операторов $\mathcal{I} + \mathcal{A}$ или $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ невырожден.

56.57. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то для любого оператора $\mathcal{B}$ имеют место равенства

$$\operatorname{rg}\mathcal{AB} = \operatorname{rg}\mathcal{BA} = \operatorname{rg}\mathcal{B}.$$

56.57.1. Пусть оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ таков, что для любого вырожденного оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,V)$ выполнено соотношение $\operatorname{rg}(\mathcal{AB}) = \operatorname{rg}\mathcal{B}$. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ невырожден.

56.57.2. Пусть оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ таков, что для любого оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,V)$ выполнено соотношение $\operatorname{rg}(\mathcal{AB}) = \operatorname{rg}(\mathcal{BA})$. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ либо нулевой, либо невырожденный.

56.58. Доказать, что произведение операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ тогда и только тогда будет невырожденным оператором, когда каждый из операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ невырожден. При этом

$$(\mathcal{AB})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

56.59. Доказать, что для невырожденного оператора $\mathcal{A}$ и произвольного оператора $\mathcal{B}$ справедливо тождество

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}-\mathcal{B}) = (\mathcal{A}-\mathcal{B})\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}+\mathcal{B}).$$

56.60. Пусть $\mathcal{A}$ – нильпотентный оператор индекса q, т.е. $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}^q = \mathcal{O}$ и $\mathcal{A}^{q-1} \neq \mathcal{O}$. Доказать, что оператор $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ невырожден и

$$(\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{I} + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \ldots + \mathcal{A}^{q-1}.$$

56.61. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ связаны соотношением $\mathcal{AB} + \mathcal{A} + \mathcal{I} = \mathcal{O}$. Доказать, что $\mathcal{A}$ – невырожденный оператор, причем $\mathcal{A}^{-1} = -\mathcal{I} - \mathcal{B}$.

56.62. Линейный оператор $\mathcal{F}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$, сохраняет определитель матриц. Доказать, что оператор $\mathcal{F}$ невырожден.

56.63. Ненулевой многочлен $f(t)$ называют *аннулирующим оператор* $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Доказать, что если у многочлена $f(t)$, аннулирующего оператор $\mathcal{A}$, свободный член отличен от нуля, то оператор $\mathcal{A}$ невырожден.

56.64. Доказать, что у любого линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном пространстве, существует аннулирующий многочлен степени не выше n^2.

56.65. Доказать, что для невырожденного оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном пространстве, обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ представляется многочленом от $\mathcal{A}$ степени не выше $n^2 - 1$.

56.66. Показать, что перестановочны любые два многочлена $f(\mathcal{A})$ и $g(\mathcal{A}^{-1})$, где $\mathcal{A}$ – произвольный невырожденный оператор.

56.67. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и найдется оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, V)$ такой, что $\mathcal{BA} = \mathcal{I}_V$ (единичный оператор пространства V). Значит ли это, что $\mathcal{AB} = \mathcal{I}_W$?

56.68. Пусть операторы $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(M_{n-1}, M_n)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(M_n, M_{n-1})$ определены соотношениями

$$\mathcal{A}f(t) = tf(t), \qquad \mathcal{B}f(t) = (f(t) - f(0))/t.$$

Показать, что оператор $\mathcal{BA}$ единичный, а оператор $\mathcal{AB}$ – нет.

56.69. Пусть V – линейная оболочка многочленов $t, t^2, \ldots, t^n$; W – пространство многочленов M_{n-1}. Рассмотреть дифференцирование многочленов как оператор $\mathcal{D}$, действующий из V в W, а также интегрирование $\int_0^t f(\xi)\,d\xi$ как оператор $\mathcal{B}$, действующий из W в V. Показать, что

$$\mathcal{BD} = \mathcal{I}_V, \qquad \mathcal{DB} = \mathcal{I}_W.$$

56.70. Пусть в условиях задачи 56.67 $\dim W > \dim V$. Доказать, что оператор $\mathcal{AB}$ будет оператором проектирования в пространстве W.

56.71. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ – линейные операторы, причем $\operatorname{rg}\mathcal{A} \le \operatorname{rg}\mathcal{B}$. Доказать, что существуют такие операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, действующие соответственно в V и в W, что $\mathcal{A} = \mathcal{DBC}$, причем один из операторов $\mathcal{C}$ или D можно выбрать невырожденным.

56.72. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) $\ker \mathcal{A} \subset \ker \mathcal{B}$;

б) $\mathcal{B} = \mathcal{C}\mathcal{A}$ для некоторого оператора $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(W, W)$.

56.73. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) $\operatorname{im} \mathcal{A} \subset \operatorname{im} \mathcal{B}$;

б) $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{D}$ для некоторого оператора $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(V, V)$.

56.74. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Доказать, что существует такое линейное отображение $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, V)$, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}$.

56.75. Пусть в линейном пространстве V задан базис e. Доказать, что следующие множества линейных преобразований пространства V являются группами относительно операции умножения преобразований:

а) множество всех невырожденных преобразований;

б) множество всех невырожденных преобразований с определителем, равным единице;

в) множество всех невырожденных преобразований, матрицы которых в базисе e верхние треугольные;

г) множество всех невырожденных преобразований, заданных в базисе e диагональными матрицами;

д) множество всех скалярных операторов $\lambda\mathcal{I}$, где $\lambda \neq 0$;

е) множество всех преобразований, матрицы которых в базисе e являются матрицами перестановок.

56.76. В линейном пространстве V дан базис e. Являются ли мультипликативными группами следующие множества линейных преобразований пространства V:

а) множество всех линейных преобразований;

б) множество всех преобразований, матрицы которых диагональны в базисе e;

в) множество всех невырожденных преобразований, которые в базисе e задаются целочисленными матрицами;

г) множество всех преобразований, матрицы которых в базисе целочисленны и имеют определители, равные 1 или -1;

д) множество всех преобразований с одинаковыми определителями, равными d;

е) множество всех невырожденных преобразований, имеющих в базисе e матрицы, каждая строка и каждый столбец которых содержат ровно по одному ненулевому элементу?

Глава XV. Структура линейного оператора в комплексном пространстве

§57. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен

Пусть V – линейное пространство над полем P. Ненулевой вектор $x \in V$ называется *собственным вектором оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если существует такое число $\lambda \in P$, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Число λ называется *собственным значением оператора* $\mathcal{A}$, *соответствующим собственному вектору* x. Множество всех собственных значений оператора $\mathcal{A}$ называется *спектром* этого оператора.

Из определения следует, что если x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ, то любой вектор αx, где $\alpha \neq 0$, также будет собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим тому же собственному значению λ.

Пример 57.1. В пространстве вещественных многочленов M_n любой многочлен нулевой степени будет собственным вектором оператора дифференцирования (§52), ему соответствует собственное значение $\lambda = 0$.

Пример 57.2. Для оператора проектирования пространства $V = L_1 \oplus L_2$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2 (§52) любой ненулевой вектор из L_1 будет собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$, так как $\mathcal{P}x = x$, $\forall x \in L_1$, а любой ненулевой вектор из L_2 будет собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 0$, так как $\mathcal{P}x = 0x$, $\forall x \in L_2$.

Ненулевой вектор-столбец $x \in P^n$ называется *собственным вектором матрицы* $A \in P^{n\times n}$, если существует число $\lambda \in P$ такое, что

$$Ax = \lambda x.$$

При этом число λ называется *собственным значением матрицы* A, *соответствующим собственному вектору* x.

Если $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – произвольный базис пространства V, то для оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ соотношения

$$\mathcal{A}x = \lambda x \quad \text{и} \quad A_e x_e = \lambda x_e$$

эквивалентны.

Это означает, что собственные значения оператора $\mathcal{A}$ и его матрицы в любом базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ совпадают, а собственные векторы матрицы A_e являются координатными столбцами собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Теорема 57.1. *Собственные векторы $x_1, \ldots, x_k$ оператора (матрицы), отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, линейно независимы.*

Следствие. Линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных значений,

или, в матричной формулировке, матрица n-го порядка не может иметь более чем n различных собственных значений.

Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n\times n}$ называется функция

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I), \quad \lambda \in P.$$

Теорема 57.2. *Характеристический многочлен матрицы* $A \in P^{n\times n}$ *является многочленом n-й степени от переменной* λ *с коэффициентами из поля* P*, причем*

$$f(\lambda) = a_0 + a_1(-\lambda) + a_2(-\lambda)^2 + \ldots + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n, \qquad (57.1)$$

где каждый коэффициент a_k, $k = \overline{0, n-1}$, *равен сумме всех главных миноров* $(n-k)$*-го порядка матрицы* A*. В частности,* $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \operatorname{tr} A$.

Теорема 57.3. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Следствие. Все матрицы одного и того же линейного оператора имеют одинаковые характеристические многочлены.

Характеристическим многочленом оператора называется функция

$$f(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}), \quad \lambda \in P.$$

Из определения определителя оператора следует, что характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в произвольном базисе.

Следом оператора $\mathcal{A}$ называется след матрицы этого оператора в произвольном базисе. Обозначение: $\operatorname{tr}\mathcal{A}$.

Теорема 57.4. *Пусть* V *– линейное пространство над полем* P*. Число* $\lambda \in P$ *является собственным значением оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ *тогда и только тогда, когда* λ *– корень его характеристического многочлена, т.е.*

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0. \qquad (57.2)$$

Уравнение (57.2) называется *характеристическим уравнением* для оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 57.5. *Каждый линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, имеет:*

1) n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;

2) хотя бы один собственный вектор.

Замечание. Теорема остается справедливой в вещественном пространстве для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Множество

$$W_{\lambda_0} = \{\, x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_0 x \}$$

называется *собственным подпространством* оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_0.

Очевидно, что $W_{\lambda_0} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I})$, поэтому собственное подпространство является линейным подпространством пространства V.

Размерность собственного подпространства W_{λ_0} называется *геометрической кратностью собственного значения* λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена называется его *алгебраической кратностью.*

Теорема 57.6. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Теорема 57.7. *Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.*

Пример 57.3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи на собственные значения и собственные векторы состоит:

а) в вычислении корней характеристического многочлена и отборе тех корней, которые принадлежат основному полю, так как только они являются собственными значениями;

б) в отыскании для каждого найденного собственного значения λ_0 максимальной линейно независимой системы собственных векторов, т.е. построении фундаментальной системы решений однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_0 I)x = 0.$$

Для указанной матрицы A, во избежание вычисления корней многочлена четвертой степени, будем находить эти корни, минуя прямое построение характеристического многочлена и вычисляя определитель матрицы $A - \lambda I$ методом выделения линейных множителей (§7). Имеем

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{вычтем из 1-й} \\ \text{строки 2-ю, а из} \\ \text{3-й строки 4-ю} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{вынесем из 1-й и} \\ \text{3-й строк общий} \\ \text{множитель} \end{array} \right\} =$$

$$= (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{прибавим ко 2-му} \\ \text{столбцу 1-й, а к 4-му} \\ \text{столбцу 3-й} \end{array} \right\} =$$

$$= (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4 = 0.$$

Отсюда следует, что матрица A имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$, алгебраическая кратность которого равна четырем.

Собственные векторы, отвечающие этому собственному значению, являются ненулевыми решениями однородной системы

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

эквивалентной (метод Гаусса) системе

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

для которой решения $e_1 = (1,1,0,0)^T$ и $e_2 = (0,0,1,1)^T$ образуют фундаментальную систему решений. Таким образом, все собственные векторы имеют вид $\alpha(1,1,0,0)^T + \beta(0,0,1,1)^T$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. ▪

Пример 57.4. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в вещественном пространстве, в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти все собственные подпространства оператора $\mathcal{A}$.

Решение. Найдем собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Так как характеристические многочлены оператора и его матрицы в любом базисе совпадают, то построим характеристический многочлен матрицы A. Имеем

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{применим теоре-} \\ \text{му Лапласа к пер-} \\ \text{вым двум строкам} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{ см. пример 57.3 } \} = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^4.$$

Корнями характеристического многочлена являются числа $\pm i$, 1, а собственным значением является только $\lambda = 1$ (так как оператор действует в вещественном пространстве), алгебраическая кратность которого равна четырем.

Собственное подпространство, отвечающее этому собственному значению, совпадает с $\ker(\mathcal{A} - \mathcal{I})$ или, в координатной форме, с множеством решений однородной системы $(A - I)x = 0$, т.е. системы

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

эквивалентной системе

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ранг матрицы этой системы равен четырем, а векторы $e_1 = (0,0,1,1,0,0)^T$ и $e_2 = (0,0,0,0,1,1)^T$ образуют фундаментальную систему решений. Таким образом, размерность собственного подпространства равна двум, а базис собственного подпространства составляют векторы, координатные столбцы которых в исходном базисе совпадают с e_1 и e_2. ▪

Пример 57.5. В вещественном пространстве M_3 многочленов степени не выше трех дан линейный оператор $\mathcal{A}$, который многочлены 1, t, t^2, t^3 переводит соответственно в многочлены $-t-t^2$, $1+2t+t^3$, $1+2t^2+t^3$, $t+t^2$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Решение. Согласно определению матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e, состоящем из многочленов 1, t, t^2, t^3, равна

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим характеристический многочлен матрицы A_e, а следовательно, и оператора $\mathcal{A}$:

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычтем из 1-й} \\ \text{строки 4-ю, а из} \\ \text{2-й строки 3-ю} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{прибавим к 4-му} \\ \text{столбцу 1-й, а к} \\ \text{3-му столбцу 2-й} \end{array} \right\} = \lambda(\lambda-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-2)^2.$$

Собственными значениями оператора $\mathcal{A}$, тем самым, являются числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2$, алгебраическая кратность каждого из них равна двум.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = 0$, решим систему $A_e x = 0$, т.е. систему

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ранг матрицы этой системы равен трем, значит, $\operatorname{def}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}) = 1$ и геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 0$ равна единице. Вектор $f_1 = (1,0,0,1)^T$ образует фундаментальную систему решений. В базисе e этому вектору соответствует многочлен $f_1(t) = 1 + t^3$. Таким образом, собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 0$, имеют вид $\alpha_1 f_1(t)$, где $\alpha_1 \neq 0$.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_2 = 2$, решим систему $(A_e - 2I)x = 0$, т.е. систему

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Ранг матрицы этой системы равен двум, значит, $\operatorname{def}(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})=2$ и собственное значение $\lambda_2=2$ имеет геометрическую кратность 2. Векторы $f_2=(1,2,0,1)^T$ и $f_3=(0,-1,1,0)^T$ образуют фундаментальную систему решений. В базисе e этим векторам соответствуют многочлены $f_2(t)=1+2t+t^3$ и $f_3(t)=-t+t^2$. Таким образом, собственные векторы, отвечающие $\lambda_2=2$, имеют вид $\alpha_2 f_2(t)+\alpha_3 f_3(t)$, где $\alpha_2^2+\alpha_3^2\neq 0$. ▪

Пример 57.6. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в комплексном пространстве, в некотором базисе имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Решение. Составим характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{прибавим к 3-му}\\ \text{столбцу 2-й}\end{array}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 2-\lambda \\ -1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{прибавим к 3-му}\\ \text{столбцу удвоен-}\\ \text{ный 1-й}\end{array}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 4-2\lambda \\ 0 & 5-\lambda & 2-\lambda \\ -1 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+10).$$

Корнями характеристического многочлена являются числа 2, $3+i$ и $3-i$. Так как оператор $\mathcal{A}$ действует в комплексном пространстве, то все эти числа являются его собственными значениями, причем каждое имеет алгебраическую кратность 1.

Для каждого собственного значения найдем соответствующие собственные векторы.

Для собственного значения $\lambda_1=2$ решим систему $(A-2I)x=0$, т.е. систему

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Ранг матрицы этой системы равен двум, значит, геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1=2$ равна единице. Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $e_1=(2,1,1)^T$. Следовательно, собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, отвечающими собственному значению $\lambda_1=2$, являются векторы, координатные столбцы которых в исходном базисе совпадают с αe_1, где $\alpha\neq 0$.

Для собственного значения $\lambda_2=3+i$ решим систему $(A-(3+i)I)x=0$, т.е. систему

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1-i & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2-i & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -2-i & 0 \end{array}\right]\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2-i & 0 \\ 0 & 2-i & -3 & 0 \end{array}\right].$$

Ранг матрицы этой системы равен двум, значит, геометрическая кратность собственного значения $\lambda_2=3+i$ также равна единице. Фундаментальная

система решений состоит из одного вектора $e_2 = (4, 3, 2 - i)^T$. Следовательно, собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, отвечающими собственному значению $\lambda_2 = 3 + i$, являются векторы, координатные столбцы которых в исходном базисе совпадают с βe_2, где $\beta \neq 0$.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_3 = 3 - i$, необходимо решить систему $(A - (3 - i)I)x = 0$. Так как A – вещественная матрица, то матрицы $A - (3 + i)I$ и $A - (3 - i)I$ комплексно сопряжены, и потому $\operatorname{rg}(A - (3 - i)I) = \operatorname{rg}(A - (3 + i)I) = 2$. Тем самым, геометрическая кратность собственного значения $\lambda_3 = 3 - i$, как и собственного значения $\lambda_2 = 3 + i$, равна единице. Так как для вектора e_2 выполнено соотношение $(A - (3 + i)I)e_2 = 0$, то переходя к комплексно сопряженным величинам, получим $(A - (3 - i)I)\overline{e_2} = 0$, откуда следует, что вектор $e_3 = \overline{e_2} = (4, 3, 2 + i)^T$ составляет фундаментальную систему решений рассматриваемой системы. Следовательно, собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, отвечающими собственному значению $\lambda_3 = 3 - i$, являются векторы, координатные столбцы которых в исходном базисе совпадают с γe_3, где $\gamma \neq 0$. ▪

Пример 57.7. Матрица

$$J_k(\lambda_0) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

размера $k \times k$ называется *жордановой клеткой k-го порядка*. Эта матрица имеет:

1) характеристический многочлен $f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k$;

2) собственное значение $\lambda = \lambda_0$ алгебраической кратности k;

3) собственные векторы, которые являются нетривиальными решениями однородной системы уравнений с матрицей

$$B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ранг которой, очевидно, равен $k - 1$. Таким образом, геометрическая кратность собственного значения $\lambda = \lambda_0$ равна единице и матрица $J_k(\lambda_0)$ (а также оператор, задаваемый этой матрицей) имеет один линейно независимый собственный вектор.

ЗАДАЧИ

57.1. Найти собственные значения и собственные векторы каждого из следующих операторов:

а) нулевого; б) единичного; в) скалярного.

57.2. Какой вид имеет матрица линейного оператора $\mathcal{A}$, если первые k векторов выбранного базиса пространства являются собственными векторами $\mathcal{A}$?

57.3. Доказать, что:

1) ядро линейного оператора совпадает с собственным подпространством, отвечающим нулевому собственному значению;

2) если λ_0 – собственное значение линейного оператора $\mathcal{A}$, то $\ker(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I})$ совпадает с собственным подпространством оператора $\mathcal{A}$, отвечающим этому собственному значению;

3) собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям, лежат в образе оператора.

57.4. Пусть A – матрица линейного оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве, а λ_0 – собственное значение этого оператора. Чему равна размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению λ_0, если ранг матрицы $A - \lambda_0 I$ равен r?

57.5. Показать, что при умножении оператора на ненулевое число собственные векторы не изменяются, а собственные значения умножаются на это число.

57.6. Показать, что оператор $\mathcal{A} - \alpha\mathcal{I}$ при любом α имеет те же собственные векторы, что и оператор $\mathcal{A}$. Найти связь между собственными значениями этих операторов.

57.7. Доказать, что если x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ, то x будет собственным вектором и для оператора: а) $\mathcal{A}^2$; б) $\mathcal{A}^k$ при любом натуральном k; в) $f(\mathcal{A})$, где $f(t)$ – любой многочлен. Найти соответствующие собственные значения этих операторов.

57.8. Верно ли следующее утверждение: если x – собственный вектор для некоторого многочлена $f(\mathcal{A})$ от оператора $\mathcal{A}$, то x является собственным вектором и для самого оператора $\mathcal{A}$?

57.9. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}^2$ имеет собственное значение λ^2, то одно из чисел λ или $-\lambda$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

57.10. Доказать, что характеристические многочлены $f(\lambda)$ матрицы A и $g(\lambda)$ матрицы $A - \lambda_0 I$ связаны соотношением

$$g(\lambda) = f(\lambda + \lambda_0).$$

57.11. Используя задачу 57.10, показать, что алгебраические кратности соответствующих собственных значений операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I}$ совпадают. Равны ли их геометрические кратности?

57.12. Доказать, что матрица невырождена тогда и только тогда, когда все корни ее характеристического многочлена от-

личны от нуля.

57.13. Доказать, что ранг матрицы не меньше суммы алгебраических кратностей ее ненулевых собственных значений.

57.14. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы. Найти связь между собственными значениями этих операторов.

57.15. Пусть квадратная матрица A n-го порядка невырождена. Доказать, что характеристические многочлены $f(\lambda)$ матрицы A и $h(\lambda)$ матрицы A^{-1} связаны соотношением

$$h(\lambda) = (-\lambda)^n |A|^{-1} f(\lambda^{-1}).$$

57.16. Используя задачу 57.15, показать, что алгебраические кратности соответствующих собственных значений операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ одинаковы. Равны ли их геометрические кратности?

57.17. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Доказать, что вещественный вектор-столбец является собственным вектором матрицы A тогда и только тогда, когда он является собственным вектором, общим для вещественной и мнимой частей матрицы A. Что можно сказать о собственных значениях этих матриц?

57.18. Известно, что матрицы A и B подобны. Как связаны их собственные векторы?

57.19. Выяснить, подобны ли следующие пары матриц:

а) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 & 2 & 4 \\ -12 & 8 & 20 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & -5 & 0 & 12 \\ 4 & -1 & 3 & 7 & 0 \\ 10 & 12 & 11 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 59 & -63 & 13 & 2 & 4 \\ -147 & 159 & -400 & 8 & 9 \\ -24 & 63 & -219 & 20 & 44 \\ 15 & 93 & 31 & 10 & 113 \\ 10 & 23 & 113 & 0 & -10 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 9 & 18 & 9 & 36 & 45 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 14 & 7 & 28 & 35 \\ 5 & 10 & 5 & 20 & 25 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -7 & 4 & -14 & -28 & -3 \\ -5 & 13 & -10 & -20 & 8 \\ 18 & 47 & 36 & 72 & 65 \\ -6 & 63 & -12 & -24 & 57 \\ 25 & 10 & 50 & 100 & 35 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 0 & 54 & 193 & 87 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -375 \\ 120 & 23 & 5 & 101 & 10 \\ 0 & 0 & 37 & 29 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & -48 & 101 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 112 & 17 & 23 & 44 & -17 \\ 43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 26 & 18 & 0 & 0 \\ 24 & 11 & 25 & 5 & 0 \\ 23 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

57.20. Ответить на следующие вопросы, не находя собственных значений и собственных векторов указанных матриц:

а) одна из матриц $A=\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ подобна диагональной матрице $D = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$; какая именно?

б) диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(1, 1, 0)$ подобна одной из матриц $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; какой именно?

в) из двух матриц $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ одна подобна диагональной матрице $D_1 = \operatorname{diag}(1, -1, 0)$, а другая – диагональной матрице $D_2 = \operatorname{diag}(1, 1, 0)$; какая какой именно?

57.21. Матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ подобна одной из матриц[1] $-I$, $J_3(-1)$, $\operatorname{diag}(-1, J_2(-1))$. Какой именно?

57.22. Из матриц $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ одна подобна матрице[2] $J_4(0)$. Какая именно?

57.23. Доказать, что собственные значения треугольной матрицы совпадают с ее диагональными элементами. Верно ли обратное: если собственные значения квадратной матрицы совпадают с ее диагональными элементами, то эта матрица является треугольной?

57.24. Показать, что характеристический многочлен квазитреугольной (квазидиагональной) матрицы равен произведению характеристических многочленов диагональных клеток.

---

[1] Матрицы $J_2(-1)$, $J_3(-1)$ – жордановы клетки (см. пример 57.7).

[2] Матрица $J_4(0)$ – жорданова клетка (см. пример 57.7).

57.25. Найти характеристический многочлен, собственные значения и собственные векторы:

а) оператора поворота плоскости V_2 геометрических векторов на угол $\varphi \in [0, 2\pi)$;

б) оператора поворота пространства V_3 геометрических векторов на угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ вокруг заданного ненулевого вектора $\mathbf{a}$;

в) оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве V_3 геометрических векторов по правилу $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – заданный ненулевой вектор;

г) оператора проектирования пространства $V = L_1 \oplus L_2$ на L_1 параллельно L_2;

д) оператора отражения пространства $V = L_1 \oplus L_2$ относительно L_1 параллельно L_2;

е) оператора дифференцирования в пространстве вещественных многочленов M_n;

ж) оператора дифференцирования, действующего в пространстве, натянутом на функции $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$.

57.26. Известны $n - 1$ (с учетом их алгебраических кратностей) собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ матрицы A порядка n. Как найти еще одно собственное значение λ_n?

57.27. Показать, что если собственными значениями (с учетом их кратностей) квадратной матрицы A n-го порядка являются числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение

$$\operatorname{tr} A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

(сумма в правой части называется *k-м моментом собственных значений* матрицы A).

57.28. Пусть A и B – квадратные матрицы n-го порядка. Доказать, что для того, чтобы A и B имели одни и те же (с учетом их алгебраических кратностей) собственные значения, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$ для всех $k = \overline{1, n}$.

57.29. Найти определитель матрицы A третьего порядка, если известно, что $\operatorname{tr} A = 2$, $\operatorname{tr} A^2 = 6$, $\operatorname{tr} A^3 = 8$.

57.30. Доказать, что в действительном линейном пространстве нечетной размерности спектр всякого оператора непуст.

Вычислить собственные значения и собственные векторы

следующих матриц.

57.31. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **57.32.** $\begin{bmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{bmatrix}$. **57.33.** $\begin{bmatrix} 2+3i & 3+i \\ 3-i & 2-3i \end{bmatrix}$.

57.34. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **57.35.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

57.36. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}$. **57.37.** $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

57.38. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **57.39.** $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

57.40. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **57.41.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

57.42. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **57.43.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Найти собственные значения следующих матриц: а) в поле действительных чисел; б) в поле комплексных чисел.

57.44. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. **57.45.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

57.46. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **57.47.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

57.48. Найти собственные значения матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2i \\ 1 & 3 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 1 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

57.49. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, матрица которого в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства является жордановой клеткой $J_n(\lambda_0)$.

57.50. Пусть x, y – собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\alpha x + \beta y$ будет собственным вектором этого оператора тогда и только тогда, когда ровно одно из чисел α или β отлично от нуля.

57.51. Доказать, что все отличные от нуля векторы пространства являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ – скалярный оператор.

57.52. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Найти собственные значения оператора $\mathcal{A}$ как оператора, действующего в вещественном пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

57.53. Линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит векторы естественного базиса[3] пространства $\mathbb{R}^4$ в векторы $(-1,0,1,-1)$, $(3,1,-2,3)$, $(-3,-1,2,-3)$, $(-2,-1,1,-2)$ соответственно. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

57.54. Линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит векторы $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$ пространства $\mathbb{R}^4$ соответственно в векторы $(0,2,1,0)$, $(1,2,1,-1)$, $(-1,2,1,1)$, $(-1,4,2,1)$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

57.55. В пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ дан линейный оператор $\mathcal{A}X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

57.56. Оператор $\mathcal{C}$ в пространстве V квадратных матриц второго порядка определен равенством $\mathcal{C}X = [A, X]$, где A – заданная матрица. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{C}$, если:

[3] См. §44, пример 44.1.

а) $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$; б) $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$;

в) $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$, $V=\mathbb{C}^{2\times 2}$.

57.57. В пространстве M_3 многочленов степени не выше трех линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит многочлены $1, t, t^2, t^3$ соответственно в многочлены $1-t+6t^2-6t^3$, $1-t+t^2-t^3$, $1-t-4t^2+4t^3$, $1-t-t^2+t^3$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

57.58. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=xy^T$ порядка больше единицы, где x, y – заданные вектор-столбцы одинакового размера.

57.59. Найти собственные значения и собственные векторы $n\times n$-матрицы

$$\begin{bmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&\dots&1\end{bmatrix}.$$

57.60. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$, где $a_{ij}=\mu_i/\mu_j$, $i,j=\overline{1,n}$, а $\mu_1,\dots,\mu_n$ – заданные ненулевые числа.

57.61. Найти собственные значения и собственные векторы $n\times n$-матриц:

а) $\begin{bmatrix}a&b&b&\dots&b\\b&a&b&\dots&b\\b&b&a&\dots&b\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\b&b&b&\dots&a\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}0&a&a&\dots&a\\b&0&a&\dots&a\\b&b&0&\dots&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\b&b&b&\dots&0\end{bmatrix}$,

где a и b – заданные вещественные числа.

57.62. Найти собственные значения матрицы

$$\begin{bmatrix}0&0&\dots&0&b_1\\0&0&\dots&0&b_2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0&b_{n-1}\\c_1&c_2&\dots&c_{n-1}&a\end{bmatrix},$$

где a, b_i, c_i, $i=\overline{1,n-1}$, – заданные вещественные числа.

57.63. Доказать, что стохастическая матрица имеет собственное значение единица. Найти какой-либо соответствующий этому собственному значению собственный вектор.

57.64. Доказать, что все собственные значения стохастической матрицы по модулю не превосходят единицы.

57.65. Найти собственные значения матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где α_i, $i = \overline{1,n}$, – заданные вещественные числа.

57.66. Найти собственные значения матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, n – нечетное число.

57.67. Для матрицы P порядка n

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

найти:

а) характеристический многочлен;

б) собственные значения в поле комплексных чисел и соответствующие им собственные векторы.

57.68. Найти собственные значения циркулянта

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix},$$

где a_i, $i = \overline{1,n}$, – заданные вещественные числа.

57.69. Найти собственные значения следующих трехдиагональных матриц n-го порядка:

а) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

57.70. Пусть A – вещественная трехдиагональная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad b_k \neq 0,\ k = \overline{1,n-1}.$$

Доказать, что:

а) все корни характеристического многочлена матрицы A вещественны;

б) геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы A равна единице.

57.71. Доказать, что утверждения предыдущей задачи остаются справедливыми и для вещественной трехдиагональной матрицы

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

если $b_k c_k > 0$, $k = \overline{1,n-1}$. Такая матрица называется *матрицей Якоби*.

57.72. Выяснить, может ли спектр:

а) матрицы $\begin{bmatrix} 1277 & 311 & 63 & 11 & 129 \\ 617 & -300 & 47 & 89 & 61 \\ 210 & 129 & 1 & 53 & 46 \\ 2 & 0 & 137 & -691 & 41 \\ 51 & 49 & 120 & 283 & -200 \end{bmatrix}$ состоять из

чисел 100, 63, 15, 1, 0;

б) матрицы $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 5 & -3 \\ 15 & -45 & 45 & 75 & -45 \\ 9 & -27 & 27 & 45 & -27 \\ 7 & -21 & 21 & 35 & -21 \\ 12 & -36 & 36 & 60 & -36 \end{bmatrix}$ состоять из чисел 27, 1, 0, 0, −20.

57.73. Найти собственные значения и собственные векторы следующих операторов, действующих в пространстве M_n многочленов степени не выше n:

а) $\mathcal{A}f(t) = tf'(t)$; б) $\mathcal{A}f(t) = t^n f\left(\frac{1}{t}\right)$;

в) $\mathcal{A}f(t) = f(t+a)$, где $a \in \mathbb{R}$ – заданное ненулевое число;

г) $\mathcal{A}f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(\tau)\,d\tau$; д) $\mathcal{A}f(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau f(\tau)\,d\tau$;

е) $\mathcal{A}f(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, где $h \in \mathbb{R}$ – заданное ненулевое число;

ж) $\mathcal{A}f(t) = \frac{f(a+t)-f(a-t)}{2t}$, где $a \in \mathbb{R}$ – заданное ненулевое число;

з) $\mathcal{A}f(t) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(t-a)+\frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$, где $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ – заданные числа.

57.74. Доказать, что ранг оператора проектирования равен его следу.

57.75. Пусть $\mathcal{R}$ – оператор отражения пространства $V = L_1 \oplus L_2$ относительно L_1 параллельно L_2. Доказать, что след оператора $\mathcal{R}$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr}\mathcal{R} = 2\dim L_1 - \dim V.$$

57.76. Доказать, что матрицы A и A^T имеют одинаковый спектр. Показать, что геометрические кратности равных собственных значений матриц A и A^T совпадают. Имеют ли матрицы A и A^T общие собственные векторы?

57.77. Оператор $\mathcal{T}$ действует в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по правилу: $\mathcal{T}A = A^T$. Доказать, что спектр оператора $\mathcal{T}$ состоит из чисел 1 и −1. Указать собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям.

57.78. Оператор $\mathcal{G}$ действует в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по прави-

лу: $\mathcal{G}X = AX$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная матрица.

а) Доказать, что число $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным значением оператора $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит спектру матрицы A.

б) Пусть векторы $a_1, \ldots, a_k$ образуют базис собственного подпространства матрицы A, отвечающего собственному значению λ. Найти все собственные векторы оператора $\mathcal{G}$, отвечающие этому же собственному значению λ.

57.79. Оператор $\mathcal{G}$ действует в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по правилу: $\mathcal{G}X = XB$, где $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная матрица.

а) Доказать, что число $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным значением оператора $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит спектру матрицы B.

б) Указать, какие матрицы являются собственными векторами оператора $\mathcal{G}$.

57.80. Пусть характеристические многочлены квадратных матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеют простые корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ соответственно. Найти собственные значения кронекерова произведения $A \otimes B$ матриц A и B.

57.81. Пусть λ и x – собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, а μ и y – собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Доказать, что кронекерово произведение $x \otimes y$ является:

а) собственным вектором матрицы $A \otimes B$;

б) собственным вектором матрицы $A \otimes I_n + I_m \otimes B$.

Какому собственному значению отвечает этот собственный вектор?

57.82. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная матрица и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – ее собственные значения. Найти собственные значения оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по правилу:

а) $\mathcal{F}X = AXA^T$;

б) $\mathcal{F}X = AXA^{-1}$ (матрица A невырождена);

в) $\mathcal{F}X = [X, A]$, где $[X, A]$ – коммутатор матриц X и A.

57.82.1. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матриц A и $A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (см. задачу 57.76), вектор-столбцы $x_1, \ldots, x_n$ являются соответствующими собственными векторами матрицы A, а вектор-столбцы $y_1, \ldots, y_n$ – соответствующими собственными векторами матрицы A^T. Для операторов предыдущей задачи показать, что для любых $i, j = \overline{1, n}$:

а) матрица $X_{ij} = x_i x_j^T$ является собственным вектором оператора $\mathcal{F}$ п. "а", отвечающим собственному значению $\lambda_i \lambda_j$;

б) матрица $X_{ij} = x_i y_j^T$ является собственным вектором оператора $\mathcal{F}$ п. "б", отвечающим собственному значению λ_i / λ_j;

б) матрица $X_{ij} = x_i y_j^T$ является собственным вектором оператора $\mathcal{F}$ п. "в", отвечающим собственному значению $\lambda_j - \lambda_i$.
Верно ли, что этими матрицами исчерпываются все собственные векторы соответствующих операторов?

57.83. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – собственные значения заданных матриц A и B n-го порядка соответственно. Найти собственные значения оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$ по правилу:

а) $\mathcal{F}X = AXB$; б) $\mathcal{F}X = AX + XB$.

57.83.1. Пусть для матриц предыдущей задачи известно, что $x_1, \ldots, x_n$ – собственные векторы матрицы A, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а $y_1, \ldots, y_n$ – собственные векторы матрицы B^T, отвечающие собственным значениям $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Показать, что матрица $X_{ij} = x_i y_j^T$ $(i, j = \overline{1, n})$ является собственным вектором каждого из операторов $\mathcal{F}$ предыдущей задачи, отвечающим собственному значению $\lambda_i \mu_j$ или $\lambda_i + \mu_j$ соответственно. Верно ли, что этими матрицами исчерпываются все собственные векторы этих операторов?

57.84. Пусть A и B – квадратные матрицы одинакового порядка.

1. Доказать, что если хотя бы одна из двух матриц A, B невырождена, то матрицы AB и BA подобны. Как в этом случае связаны собственные векторы матриц AB и BA?

2. Верно ли утверждение предыдущего пункта, если обе матрицы A и B вырождены?

57.85. Доказать, что если A и B – квадратные матрицы одинакового порядка, то характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают.

57.86. Пусть A и B – произвольные матрицы размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно. Доказать, что для характеристических многочленов матриц AB и BA выполнено соотношение:

$$(-\lambda)^n |AB - \lambda I_m| = (-\lambda)^m |BA - \lambda I_n|.$$

57.87. Доказать, что собственные значения блочных матриц:

а) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix}$

являются соответственно: а) собственными значениями матриц $A \pm B$; б) собственными значениями матриц $A \pm iB$; в) квадратными корнями из собственных значений матриц $A^2+B^2 \pm i[A,B]$.

57.88. Пусть A – квадратная матрица n-го порядка и число λ является ее собственным значением геометрической кратности не меньше k. Доказать, что λ является собственным значением любой главной подматрицы матрицы A порядка $m > n-k$.

57.89. Доказать, что любая квадратная матрица A является суммой двух невырожденных матриц.

57.90. Доказать, что для любой вырожденной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n и любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется матрица $B = (b_{ij})$ того же порядка, которая:

а) невырождена;

б) для всех ее элементов выполнено неравенство $|b_{ij}-a_{ij}| < \varepsilon$.

57.91. Доказать, что характеристический многочлен матрицы

$$C_{f(\lambda)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

равен $f(\lambda) = (-\lambda)^n + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \dots + a_1(-\lambda) + a_0$. Матрица $C_{f(\lambda)}$ называется *сопровождающей матрицей многочлена* $f(\lambda)$ (или *матрицей Фробениуса*).

57.92. Пользуясь предыдущей задачей, показать, что всякий многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным $(-1)^n$, может быть характеристическим многочленом некоторой квадратной матрицы порядка n.

57.93. Вычислить:

1) $2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\pi k}{n+1}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\pi k}{n+1}$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{k^2}$, где $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $n = 2m+1$;

4) $\prod\limits_{0\le j<k\le n-1}(\varepsilon^k - \varepsilon^j)$, где $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $n = 2m+1$.

§58. Операторы и матрицы простой структуры

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется *оператором простой структуры*, если в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Квадратная матрица $A \in P^{n\times n}$ называется *матрицей простой структуры*, если она имеет n линейно независимых собственных векторов.

Очевидно, что линейный оператор является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда его матрица в любом базисе имеет простую структуру.

Теорема 58.1. *Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу,* или, в матричной формулировке, *квадратная матрица является матрицей простой структуры тогда и только тогда, когда она подобна диагональной.*

Если матрицы A и B подобны и $T^{-1}AT = B$, то говорят, что матрица A *преобразованием подобия приводится* к матрице B, при этом матрица T называется *матрицей преобразования подобия.*

Из теоремы 58.1 следует, что матрица простой структуры приводится преобразованием подобия к диагональной матрице:

$$T^{-1}AT = \Lambda, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

При этом, как нетрудно проверить, столбцами матрицы T преобразования подобия являются линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответственно.

Из теоремы 58.1 следует, что в n-мерном пространстве линейный оператор, имеющий n различных собственных значений, является оператором простой структуры.

В соответствии с теоремой 58.1 оператор (матрицу) простой структуры называют также *диагонализуемым оператором* (*матрицей*).

Теорема 58.2. *Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда его собственные подпространства в прямой сумме дают все пространство V.*

Теорема 58.3. *Линейный оператор, действующий в комплексном пространстве, имеет простую структуру тогда и только тогда, когда для каждого собственного значения этого оператора геометрическая кратность совпадает с алгебраической.*

В вещественном пространстве эта теорема верна для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

Пример 58.1. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

подобна диагональной матрице. Указать матрицу T преобразования подобия, приводящую матрицу A к диагональному виду.

Решение. Матрица A подобна диагональной матрице тогда и только тогда, когда она имеет простую структуру, т.е. тогда и только тогда, когда имеет четыре линейно независимых собственных вектора. Найдем эти векторы. Имеем

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{прибавим к} \\ \text{1-му столбцу} \\ \text{все остальные} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda+1 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda+1 & -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda+1 & 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda+1 & 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{вычтем из всех} \\ \text{строк 1-ю} \end{array} \right\} = (-\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{прибавим к 1-му} \\ \text{столбцу 3-й} \end{array} \right\} =$$

$$= (-\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda-1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)(\lambda+3)(\lambda-2).$$

Таким образом, матрица A имеет четыре различных собственных значения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-3$, $\lambda_4=2$, следовательно, является матрицей простой структуры. Решая однородные системы $(A-\lambda_i I)x=0$, $i=\overline{1,4}$, найдем соответствующие собственные векторы. Получим

для $\lambda_1=1$: $e_1=(1,1,1,1)^T$,

для $\lambda_2=-1$: $e_2=(1,-1,1,-1)^T$,

для $\lambda_3=-3$: $e_3=(1,-3,9,-27)^T$,

для $\lambda_4=2$: $e_4=(1,2,4,8)^T$.

Векторы e_1, e_2, e_3, e_4 линейно независимы, так как отвечают различным собственным значениям.

Матрица

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & -27 & 8 \end{bmatrix},$$

столбцами которой являются собственные векторы e_1, e_2, e_3, e_4, является искомой матрицей преобразования подобия. ▪

Пример 58.2. Для матрицы $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ найти матрицу A^{30}.

Решение. Покажем, что матрица A подобна диагональной. Для этого найдем все собственные значения и соответствующие собственные векторы

матрицы A. Имеем

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+6=(\lambda-6)(\lambda-1),$$

следовательно, $\lambda_1=6$, $\lambda_2=1$ – собственные значения матрицы A. Построив фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений $(A-\lambda_i I)x=0$, $i=1,2$, найдем максимальную линейно независимую систему собственных векторов, отвечающих λ_i. Для $\lambda_1=6$ собственным вектором будет вектор $e_1=(1,2)^T$, а для $\lambda_2=1$ – вектор $e_2=(-2,1)^T$. Если $T=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ – матрица, столбцами которой являются найденные собственные векторы, то (пример 58.1) $A=T\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}T^{-1}$, откуда следует, что $A^{30}=T\begin{bmatrix} 6^{30} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}T^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6^{30} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6^{30}+4 & 2(6^{30}-1) \\ 2(6^{30}-1) & 4\cdot 6^{30}+1 \end{bmatrix}$. ■

ЗАДАЧИ

58.1. Пусть $V=L_1\oplus L_2$. Доказать, что:

а) оператор проектирования на L_1 параллельно L_2;

б) оператор отражения относительно L_2 параллельно L_1 имеет простую структуру.

58.2. Построить базис из собственных векторов операторов:

а) отражения плоскости относительно прямой $x-2y=0$ параллельно прямой $3x-y=0$;

б) проектирования плоскости на прямую $3x+2y=0$ параллельно прямой $x-y=0$;

в) проектирования пространства на плоскость $x-3y=0$ параллельно прямой $x+z=0$, $x+y-2z=0$;

г) отражения пространства относительно прямой $x=y=-z$ параллельно плоскости $x+2y-z=0$.

58.3. Доказать, что у оператора простой структуры:

а) образ есть линейная оболочка собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям;

б) пересечение ядра и образа состоит только из нулевого вектора;

в) ядро и образ в прямой сумме дают все пространство.

58.4. Привести пример линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$, для которого $\mathbb{R}^n\neq\operatorname{im}\mathcal{A}+\ker\mathcal{A}$.

58.5. Доказать, что всякий многочлен $f(\mathcal{A})$ от оператора простой структуры сам имеет простую структуру. Кроме того, если

$\mathcal{A}$ невырожден, то $\mathcal{A}^{-1}$ имеет простую структуру.

58.6. Оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве V, имеет n различных собственных значений. Доказать, что всякий оператор $\mathcal{B}$, перестановочный с $\mathcal{A}$, является оператором простой структуры.

58.7. Показать, что в условиях предыдущей задачи оператор $\mathcal{B}$ можно представить многочленом от оператора $\mathcal{A}$.

58.8. Оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве V, имеет $n-1$ различных собственных значений. Найти необходимое и достаточное условие диагонализуемости оператора $\mathcal{A}$.

58.9. Доказать, что если матрица A имеет простую структуру, то простую структуру имеет и матрица A^T.

58.10. Пусть хотя бы один из операторов $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$, действующих в пространстве V, обратим. Доказать, что если оператор $\mathcal{AB}$ имеет простую структуру, то простую структуру будет иметь и оператор $\mathcal{BA}$. Верно ли это утверждение, если оба оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вырождены?

58.11. Выяснить, замкнуто ли множество всех операторов простой структуры, действующих в пространстве V, относительно операций: а) сложения операторов; б) умножения операторов.

Выяснить, диагонализуемы ли операторы, заданные в некотором базисе комплексного пространства матрицами.

58.12. $\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$. **58.13.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. **58.14.** $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$.

58.15. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$. **58.16.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

58.17. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **58.18.** $\begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 11 & 4 \end{bmatrix}$.

58.19. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{bmatrix}$. **58.20.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

58.21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. **58.22.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$.

58.23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 58.24. $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$.

58.25. $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}$. 58.26. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

58.27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. 58.28. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$.

Выяснить, диагонализуемы ли следующие матрицы: а) над полем $\mathbb{R}$; б) над полем $\mathbb{C}$.

58.29. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. 58.30. $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. 58.31. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

58.32. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 58.33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

58.34. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$. 58.35. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

58.36. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 58.37. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

58.38. $\begin{bmatrix} -5 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

58.39. В пространстве вещественных многочленов M_n дан оператор $\mathcal{A}$, действующий по правилу

$$\mathcal{A}p(t) = t^2p''(t) - btp'(t) - cp(t).$$

1. Найти спектр $\mathcal{A}$.

2. При каких b, c оператор $\mathcal{A}$ имеет простую структуру?

Указать диагональный вид матриц операторов, действующих

в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ и заданных в естественном базисе этого пространства следующими матрицами.

58.40. $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **58.41.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

58.42. $\begin{bmatrix} x & y & \dots & y \\ y & x & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & \dots & x \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

58.43. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

58.44. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

58.45. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

58.46. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

58.47. Проверить, имеет ли матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

простую структуру, и, если да, указать ее диагональный вид, в следующих случаях:

а) $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 1$, $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 4$;

б) $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 1$, $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$;

в) $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 1$, $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = -1$

(здесь $m = [(n+1)/2]$, $n \geq 2$).

58.48. При каких условиях на α_1, $\alpha_2, \dots$, α_n матрица A из предыдущей задачи подобна диагональной матрице?

58.49. Доказать, что если матрица A подобна диагональной матрице $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $T^{-1}AT = \Lambda$, то диагональные элементы матрицы Λ совпадают с собственными значениями A, а столбцы матрицы преобразования подобия T – с линейно независимыми собственными векторами, отвечающими λ_1, $\lambda_2, \dots$, λ_n соответственно.

Для каждой из приведенных ниже матриц выяснить, имеет ли эта матрица простую структуру. В случае положительного ответа найти матрицу преобразования подобия, приводящую данную матрицу к диагональному виду.

58.50. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **58.51.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

58.52. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **58.53.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

58.54. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **58.55.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

58.55.1. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **58.55.2.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & \varepsilon & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\varepsilon \neq 0$.

58.56. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}$. **58.57.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

58.58. $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$. **58.59.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$.

58.60. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. **58.61.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

58.62. Показать, что если матрица A подобна диагональной матрице $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то многочлен $f(A)$ от матрицы A подобен матрице $\operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$, причем с той же матрицей преобразования подобия.

58.63. Найти необходимые и достаточные условия диагонализуемости ненулевой матрицы $A = xy^T$, где $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ – заданные вектор-столбцы.

58.64. Известно, что линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в трехмерном комплексном линейном пространстве, имеет в некотором базисе вещественную матрицу и по крайней мере один корень характеристического многочлена этой матрицы не является вещественным. Доказать, что $\mathcal{A}$ – оператор простой структуры.

58.65. Может ли сопровождающая матрица[4] многочлена $f(\lambda)$ иметь простую структуру, если у этого многочлена есть хотя бы один кратный корень?

58.66. Доказать, что матрицы A и B простой структуры подобны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый характеристический многочлен.

58.67. Доказать, что комплексная матрица, все собственные значения которой различны, подобна сопровождающей матрице своего характеристического многочлена.

58.68. Доказать, что всякий циркулянт[5] над полем комплекс-

[4] См. задачу 57.91.

[5] См. задачу 57.68.

ных чисел диагонализуем.

58.69. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все различные корни многочлена $f(\lambda)$. Найти собственные векторы сопровождающей матрицы этого многочлена.

58.70. Пусть матрица A имеет простую структуру. Доказать, что для любого числа α ранг матрицы $A - \alpha I$ равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

58.71. Доказать, что если $\mathcal{A}$ – оператор простой структуры, а $f(\lambda)$ – его характеристический многочлен, то $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, т.е. оператор простой структуры аннулируется своим характеристическим многочленом.

58.72. Найти $\operatorname{tr} B$, где $B = I + A + A^2 + \ldots + A^{28}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

58.73. Найти A^{100}, где $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

58.74. Найти e^A, где $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$.

58.75. Найти A^{100}, если $I + A + A^2 + A^3 + \ldots = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

58.76. Найти

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{tr} A^{k+1}}{\operatorname{tr} A^k},$$

если: а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

58.77. При каких вещественных значениях параметра a матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет простую структуру: а) над полем $\mathbb{R}$; б) над полем $\mathbb{C}$; в) над полем $\mathbb{Q}$?

58.78. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любой комплексной матрицы A простой структуры найдется матрица B такая, что $B^n = A$.

58.79. Доказать, что если матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ диагонализуемы, то диагонализуемы и следующие матрицы: $A \otimes B$, $A \otimes I_n + I_m \otimes B$.

58.80. Доказать, что если матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеют простую структуру, то операторы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$, действующие в пространстве матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ по правилам

$$\mathcal{G}X = AXB,$$
$$\mathcal{F}X = AX + XB,$$

также имеют простую структуру.

§59. Инвариантные подпространства. Прямая сумма операторов

Пусть V – линейное пространство над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$. Линейное подпространство L пространства V называется *инвариантным подпространством относительно оператора* $\mathcal{A}$, если для любого вектора x из L его образ $\mathcal{A}x$ также лежит в L.

Пример 59.1. Тривиальные подпространства $\{\theta\}$ и V инвариантны относительно любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$.

Пример 59.2. Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ инвариантными подпространствами будут $\ker\mathcal{A}$ и $\operatorname{im}\mathcal{A}$, так как если $\mathcal{A}x = \theta$, то $\mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}\theta = \theta$, и если $y = \mathcal{A}x$, то $\mathcal{A}y = \mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}x_1$, где $x_1 = \mathcal{A}x$.

Пример 59.3. Для оператора дифференцирования (§52) в пространстве многочленов M_n инвариантными подпространствами являются все подпространства $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Теорема 59.1. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ и L – нетривиальное инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$. Тогда существует базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазитреугольную форму.*

Теорема 59.2. *Если пространство V является прямой суммой нетривиальных подпространств $L_1, \ldots, L_k$, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, то в пространстве V существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму.*

Пусть L – подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$. Отображение $\mathcal{A}|L : L \to L$, определенное равенством

$$(\mathcal{A}|L)x = \mathcal{A}x, \quad \forall x \in L,$$

называется *индуцированным оператором, порожденным оператором* $\mathcal{A}$ или *сужением (ограничением) оператора* $\mathcal{A}$ *на подпространство* L. В силу линейности оператора $\mathcal{A}$ индуцированный оператор также будет линейным. Он совпадает с оператором $\mathcal{A}$ на подпространстве L и не определен вне его. Итак, $\mathcal{A}|L \in \mathcal{L}(L,L)$.

Теорема 59.3. *Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающего оператора.*

Теорема 59.4. *Если $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$ – прямая сумма подпространств $L_1, \ldots, L_k$, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $\mathcal{A}|L_1, \ldots, \mathcal{A}|L_k$:*

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)\ldots f_k(\lambda).$$

Теорема 59.5. *Произвольный линейный оператор, действующий в комплексном пространстве, на любом своем инвариантном подпространстве имеет хотя бы один собственный вектор.*

Теорема 59.6. *В n-мерном комплексном пространстве V для любого линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ существует система n вложенных друг в друга инвариантных подпространств $L_1, \ldots, L_n$ всех размерностей от 1 до n, т.е. таких, что*

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n = V,$$

где $\dim L_k = k$, $k = \overline{1, n}$.

Теорема 59.7. *Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором матрица линейного оператора имеет треугольную форму,* или, в матричной формулировке, *любая квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей треугольную форму.*

Теорема 59.8. *У всякого линейного оператора, действующего в комплексном пространстве, существует одномерное инвариантное подпространство.*

Теорема 59.9. *У всякого линейного оператора, действующего в вещественном пространстве, существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется *нильпотентным*, если существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{A}^q = \mathcal{O}$. Наименьшее число q, обладающее этим свойством, называется *индексом нильпотентности (высотой)* оператора $\mathcal{A}$. Очевидно, что индекс нильпотентности ненулевого оператора $q \geq 2$. Аналогично определяется нильпотентная матрица $A \in P^{n \times n}$ и ее индекс нильпотентности.

Пример 59.4. В пространстве многочленов M_n оператор дифференцирования (§52) является нильпотентным оператором индекса $n + 1$.

Пример 59.5. Жорданова клетка

$$J_k(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

является нильпотентной матрицей индекса k.

Теорема 59.10. *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – нильпотентный оператор индекса q и $x_0 \in V$ – вектор, для которого $\mathcal{A}^{q-1} x_0 \neq \theta$, то векторы*

$$x_0, \mathcal{A}x_0, \ldots, \mathcal{A}^{q-1} x_0$$

линейно независимы.

Следствие. Индекс нильпотентности не превосходит размерности пространства.

Теорема 59.11. *В комплексном пространстве линейный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю.*

Если $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$ – прямая сумма подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_k$, инвариантных относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то оператор $\mathcal{A}$ называется *прямой суммой индуцированных операторов* $\mathcal{A}|L_1, \ldots, \mathcal{A}|L_k$. Эту же ситуацию описывают словами: *оператор $\mathcal{A}$ приводится подпространствами* $L_1, L_2, \ldots, L_k$.

Теорема 59.12. *Вырожденный и не нильпотентный линейный*

оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.

Указанное в теореме разложение может быть получено следующим образом. Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, $N_k = \ker \mathcal{A}^k$, $T_k = \operatorname{im} \mathcal{A}^k$, то ядра N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q, начиная с которого все N_k совпадают:

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q = N_{q+1} = \ldots.$$

Подпространства N_q и T_q дают требуемое разложение:

$V = N_q \oplus T_q$;

N_q, T_q инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$;

оператор $\mathcal{A}|N_q$ нильпотентен;

оператор $\mathcal{A}|T_q$ обратим.

Из теоремы 59.12 следует, что в комплексном пространстве V:

1) оператор $\mathcal{A}$ на подпространстве N_q имеет только нулевые собственные значения, а на подпространстве T_q его собственные значения отличны от нуля;

2) для оператора $\mathcal{A}$ с характеристическим многочленом $f(\lambda) = (-\lambda)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$:

а) характеристические многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ операторов $\mathcal{A}|N_q$ и $\mathcal{A}|T_q$ имеют вид

$$f_1(\lambda) = (-\lambda)^{m_1}, \quad f_2(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p};$$

б) при этом

$$\dim N_q = m_1, \quad \dim T_q = m_2 + \ldots + m_p.$$

Пример 59.6. Найти все инвариантные подпространства оператора, заданного в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Найдем характеристический многочлен оператора. Имеем:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{прибавим к 1-му} \\ \text{столбцу 3-й} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычтем из 3-й} \\ \text{строки 1-ю} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).$$

Все собственные значения оператора различны: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Поэтому (следствие из теоремы 58.1) оператор имеет простую структуру и (см. задачу 59.20) любое нетривиальное инвариантное подпространство этого оператора является линейной оболочкой некоторой системы его собственных векторов. Решив системы уравнений $(A - \lambda_i I)x = 0$, $i = 1,2,3$, найдем собственные векторы:

для $\lambda_1 = 1$ собственные векторы имеют вид αe_1, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $e_1 = (1,1,1)^T$,

для $\lambda_2 = 2$ – вид αe_2, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $e_2 = (1,0,1)^T$,
для $\lambda_3 = 3$ – вид αe_3, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $e_3 = (1,1,0)^T$,
и других собственных векторов у оператора нет.

Таким образом, подпространства $\{\theta\}$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}(e_1)$, $\mathcal{L}(e_2)$, $\mathcal{L}(e_3)$, $\mathcal{L}(e_1, e_2)$, $\mathcal{L}(e_1, e_3)$, $\mathcal{L}(e_2, e_3)$ – это все инвариантные подпространства данного оператора. ▪

Пример 59.7. Найти все инвариантные подпространства оператора, заданного в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Решение. Найдем характеристический многочлен оператора. Имеем:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычтем из 1-й} \\ \text{строки 2-ю} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{ко 2-й строке прибавим 1-ю,} \\ \text{из 3-й строки вычтем 1-ю,} \\ \text{умноженную на 3} \end{array} \right\} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & -3 \\ 0 & 18 & 12-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3 \\ 18 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(6-\lambda).$$

Оператор имеет собственные значения $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 6$ алгебраических кратностей $m_1 = 2$ и $m_2 = 1$ соответственно.

Решив системы уравнений $(A - \lambda_i I)x = 0$, $i = 1, 2$, найдем максимальные линейно независимые системы собственных векторов: для $\lambda_1 = 3$ – это $e_1 = (-7, 5, -6)^T$, $e_2 = (6, -3, 3)^T$, а для $\lambda_2 = 6$ – это $e_3 = (1, 1, -3)^T$. Векторы e_1, e_2 образуют базис собственного подпространства, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = 3$, так что геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 3$ равна 2 и равна его алгебраической кратности m_1. Это же относится и к собственному значению $\lambda_2 = 6$. На основании теоремы 58.3 оператор имеет простую структуру (теорема применима к данному оператору, так как его характеристический многочлен $f(\lambda)$ имеет только вещественные корни), и следовательно (см. задачу 59.20), любое нетривиальное инвариантное подпространство оператора является линейной оболочкой некоторой системы его собственных векторов. Собственные векторы оператора имеют вид $c = \alpha e_1 + \beta e_2$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, и αe_3, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, и других собственных векторов у оператора нет.

Таким образом, одномерными инвариантными подпространствами будут: подпространство $\mathcal{L}(e_3)$ и любое одномерное подпространство собственного подпространства $\mathcal{L}(e_1, e_2)$, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = 3$. Двумерными инвариантными подпространствами будут: подпространство $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ и все подпространства вида $\mathcal{L}(c, e_3)$, где $c \in \mathcal{L}(e_1, e_2)$, $c \neq \theta$. Последнее подпространство $\mathcal{L}(c, e_3)$ и подпространство $\mathcal{L}(e_3)$, т.е. подпространства $\mathcal{L}(c, e_3)$ для любого $c \in \mathcal{L}(e_1, e_2)$, могут быть заданы и в виде линейной оболочки $\mathcal{L}(a, e_3)$, где a – любой вектор V, так как если $a = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, то

$$\mathcal{L}(a, e_3) = \mathcal{L}(\alpha e_1 + \beta e_2, e_3) = \begin{cases} \mathcal{L}(e_3), & \text{если } c = \alpha e_1 + \beta e_2 = \theta, \\ \mathcal{L}(c, e_3), & \text{если } c \neq \theta. \end{cases}$$

Итак, полный список инвариантных подпространств таков:

$\{\theta\}$, V, любое одномерное подпространство пространства $\mathcal{L}(e_1, e_2)$, само подпространство $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ и подпространства $\mathcal{L}(a, e_3)$, где a – любой вектор из V. ▪

Пример 59.8. Найти два двумерных инвариантных подпространства относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{bmatrix}.$$

Решение. Известно (см. задачу 59.25), что если λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то любое подпространство, содержащее $\operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$, инвариантно относительно этого оператора. Найдем собственные значения:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 1 \\ 5 & -5-\lambda & 5 \\ 4 & -9 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 1 \\ 5 & -\lambda & 5 \\ 4 & -\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -5+\lambda & 1 & 9-\lambda \end{vmatrix}.$$

Отсюда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ и, очевидно, $\lambda_3 = \operatorname{tr} A - \lambda_1 - \lambda_2 = 5$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 5$ алгебраических кратностей 1 и 2 соответственно.

Найдем те двумерные инвариантные подпространства, которые содержат $\operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I}) = \operatorname{im}\mathcal{A}$. Так как $\operatorname{rg}\mathcal{A} = 2$ и $\lambda_1 = 0$, то все они совпадают с подпространством $L_1 = \operatorname{im}\mathcal{A}$, поэтому L_1 может быть найдено как линейная оболочка столбцов матрицы A (§54), и (см. пример 45.2 в §45) может быть описано уравнением

$$L_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \tag{59.1}$$

Аналогично, все двумерные инвариантные подпространства, которые содержат $\operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{I}) = \operatorname{im}(\mathcal{A} - 5\mathcal{I})$, совпадают с $\operatorname{im}(\mathcal{A} - 5\mathcal{I})$, которое описывается уравнением

$$L_2 : x_1 - x_2 + x_3 = 0. \tag{59.2}$$

Итак, L_1 и L_2 – два двумерных подпространства, инвариантных относительно $\mathcal{A}$.

Отметим, что алгоритм, использованный в предыдущих примерах 59.6 и 59.7, позволяет построить только одно двумерное инвариантное подпространство.

Действительно, собственному значению $\lambda_1 = 0$ соответствуют собственные векторы αe_1, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $e_1 = (0, 1, 1)^T$, а собственному значению $\lambda_2 = 5$ – собственные векторы αe_2, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $e_2 = (1, 0, -1)^T$. Тем самым, получим двумерное инвариантное подпространство $\mathcal{L}(e_1, e_2)$, которое, очевидно, совпадает с подпространством L_2.

Другой алгоритм решения задачи о нахождении инвариантных подпространств использован в примере 61.3. ▪

ЗАДАЧИ

59.1. Доказать, что сумма и пересечение любого числа подпространств, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A}$, также инвариантны относительно $\mathcal{A}$.

59.2. Доказать, что следующие подпространства инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$:

а) ядро и образ оператора $\mathcal{A}$;

б) собственные подпространства оператора $\mathcal{A}$;

в) линейная оболочка любой системы собственных векторов оператора $\mathcal{A}$;

г) всякое подпространство, содержащее образ оператора $\mathcal{A}$;

д) образ и полный прообраз всякого подпространства L, инвариантного относительно $\mathcal{A}$.

59.3. Доказать, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} - \alpha\mathcal{I}$, где α – любое число из основного поля, имеют одни и те же инвариантные подпространства.

59.4. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ имеют одни и те же инвариантные подпространства.

59.5. Показать, что всякое подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$, инвариантно и относительно любого многочлена от этого оператора. Верно ли обратное утверждение?

59.6. Доказать, то ядро и образ любого многочлена $f(\mathcal{A})$ от оператора $\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$.

59.7. Пространство V размерности n разложено в прямую сумму подпространства L_1 размерности k ($k > 0$) и подпространства L_2 размерности $n - k$: $V = L_1 \oplus L_2$. Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V выбран так, что $L_1 = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$, $L_2 = \mathcal{L}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ представим в блочном виде

$$A_e = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где A_{11} и A_{22} – квадратные матрицы порядков k и $n-k$ соответственно. Доказать, что:

а) $A_{21} = O$ тогда и только тогда, когда L_1 инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$;

б) $A_{21} = O$ и $A_{12} = O$ тогда и только тогда, когда оба подпространства L_1 и L_2 инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$.

59.8. Показать, что всякая комплексная квадратная матрица

A порядка n подобна матрице B вида

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & B_{12} \\ O & B_{22} \end{bmatrix},$$

где B_{22} – матрица порядка $n-1$ и $b_{11} \in \mathbb{C}$. Указать способ построения матрицы преобразования подобия в этом случае.

59.9. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве, имеет n различных собственных значений. Найти все инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства и определить их количество.

59.10. Пусть $\mathcal{A}$ – оператор простой структуры, действующий в n-мерном пространстве V. Найти все подпространства, инвариантные относительно оператора $\mathcal{A}$.

59.11. Найти все подпространства, инвариантные относительно:

а) скалярного оператора;

б) оператора проектирования $\mathcal{P}$ на подпространство L_1 параллельно L_2;

в) оператора отражения $\mathcal{R}$ относительно L_2 параллельно L_1;

г) оператора поворота плоскости V_2 вокруг начала координат на угол α;

д) оператора $\mathcal{A}$, действующего в геометрическом пространстве V_3 по правилу: $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор;

е) оператора транспонирования в пространстве квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$;

ж) оператора дифференцирования $\mathcal{D}$, действующего в пространстве многочленов M_n;

з) оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве многочленов M_n по правилу: $\mathcal{A}f(t) = tf'(t)$;

и) оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве многочленов M_n по правилу: $\mathcal{A}f(t) = t^{-1}\int_0^t f(\xi)\,d\xi$.

59.12. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей A в некотором базисе e пространства V. Найти все подпространства, инвариантные относительно этого оператора, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

д) $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$; е) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

ж) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; з) $A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

59.12.1. Доказать, что любое одномерное инвариантное подпространство линейного оператора является линейной оболочкой, натянутой на его собственный вектор.

59.13. Что можно сказать об операторе $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, относительно которого любое подпространство в V инвариантно?

59.14. Доказать, что если в n-мерном пространстве V всякое подпространство размерности k, где k – фиксированное натуральное число, $1 \leq k < n$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ – скалярный оператор.

59.15. Пусть $n \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Привести пример n-мерного линейного пространства V и линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, имеющего ровно $n+1$ различных инвариантных подпространств.

59.16. Что можно сказать о линейном пространстве V и операторе $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если оператор $\mathcal{A}$ имеет лишь два различных инвариантных подпространства?

59.17. Доказать, что ненулевой линейный оператор $\mathcal{A} \neq \mathcal{I}$, для которого $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, является оператором проектирования на $\operatorname{im} \mathcal{A}$ параллельно $\ker \mathcal{A}$.

59.18. Доказать, что всякий линейный оператор $\mathcal{A}$, не являющийся скалярным и для которого $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$, является оператором отражения относительно собственного подпространства, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = 1$, параллельно собственному подпространству, отвечающему собственному значению $\lambda_2 = -1$.

59.19. Доказать, что оператор простой структуры $\mathcal{A}$ на каждом своем нетривиальном инвариантном подпространстве L индуцирует также оператор простой структуры $\mathcal{A}|L$.

59.20. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что всякое нетривиальное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$, имеющего простую структуру, натянуто на некоторую систему собственных векторов этого оператора.

59.21. Доказать, что любое нетривиальное подпространство

L комплексного пространства V, инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, содержит одномерное подпространство, также инвариантное относительно $\mathcal{A}$.

59.22. Доказать, что любое нечетномерное подпространство L действительного пространства V, инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, содержит одномерное подпространство, также инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Верно ли это утверждение для инвариантных подпространств четной размерности? При каких условиях подпространство L содержит одномерное подпространство, все векторы которого остаются неподвижными под действием оператора $\mathcal{A}$?

59.23. Доказать, что комплексное пространство, содержащее единственное одномерное подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, неразложимо в прямую сумму двух ненулевых подпространств, инвариантных относительно $\mathcal{A}$.

59.24. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – заданный оператор. Доказать, что комплексное пространство V разлагается в прямую сумму (одного или нескольких) инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств, каждое из которых содержит единственное одномерное инвариантное подпространство и, значит (согласно предыдущей задаче), далее не разложимо.

59.25. Пусть λ_0 – собственное значение линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве V. Доказать, что всякое подпространство в V, содержащее $\operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I})$, инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

59.26. Доказать, что если линейный оператор имеет собственный вектор, то для него существует $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.

59.27. Доказать, что в n-мерном комплексном пространстве всякий линейный оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n-1$.

59.28. Доказать, что всякое k-мерное инвариантное подпространство линейного оператора, действующего в комплексном линейном пространстве V, содержит $(k-1)$-мерное инвариантное подпространство.

59.29. Что можно сказать о комплексном линейном пространстве V и операторе $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если оператор $\mathcal{A}$ имеет: а) ровно три различных инвариантных подпространства; б) ровно четыре различных инвариантных подпространства?

59.30. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном комплексном пространстве V, обладает единственным одномерным инвариантным подпространством, то он имеет ровно $n+1$ различных инвариантных подпространств.

59.31. Пусть A – матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе e, λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и ненулевой столбец a удовлетворяет уравнению $a^T(A-\lambda I)=0$. Доказать, что уравнение $a^T x=0$ в базисе e определяет $(n-1)$-мерное подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$.

59.32. Найти $(n-1)$-мерные подпространства в $\mathbb{R}^n$, инвариантные относительно линейного оператора, заданного в некотором базисе своей матрицей $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, если:

а) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -3 & -3 & -3\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} -3 & 10 & -10\\ -7 & 4 & -4\\ -2 & -3 & 3\end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -3 & -2 & 3\end{bmatrix}$; г) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$;

д) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$; е) $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & -4\\ -2 & 0 & 4 & -5 & 3\\ 2 & -4 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -1 & 0 & 2\\ 4 & -3 & -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$.

59.33. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве V над полем P и имеет в некотором базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1\\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

Доказать, что если у многочлена $x^n-a_1x^{n-1}-\dots-a_{n-1}x-a_n$ нет корней из P, то оператор $\mathcal{A}$ не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

59.34. Пусть $\lambda=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ – собственное значение вещественной матрицы A порядка n, $z=x+iy\in\mathbb{C}^n$ – собственный вектор матрицы A (x, y – вещественные векторы). Доказать, что

x и y образуют базис двумерного инвариантного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$ матрицы A.

59.35. Найти двумерные инвариантные подпространства для линейного оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$ и заданного в некотором его базисе матрицей:

а) $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

59.36. Доказать, что всякая действительная квадратная матрица подобна верхней (нижней) квазитреугольной матрице, у которой диагональные клетки имеют порядок 1 или 2.

59.37. Из результата предыдущей задачи вывести следующее утверждение: в n-мерном действительном пространстве всякий оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n-1$ или $n-2$.

59.37.1. Что можно сказать о вещественном линейном пространстве V и об операторе $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если $\mathcal{A}$ имеет: а) ровно три различных инвариантных подпространства; б) ровно четыре различных инвариантных подпространства?

59.37.2. Может ли оператор, действующий в четырехмерном вещественном пространстве, иметь бесконечно много двумерных инвариантных подпространств, не являясь при этом оператором простой структуры?

59.38. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве V.

1. Известно, что оператор $\mathcal{A}$ имеет систему вложенных друг в друга инвариантных подпространств $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n = V$, где $\dim L_k = k$, $k = \overline{1,n}$. Доказать, что в V существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ верхняя треугольная.

2. Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет верхнюю треугольную форму. Доказать, что подпространства $L_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$, $k = \overline{1,n}$, инвариантны относительно $\mathcal{A}$ и строго вложены друг в друга.

59.39. Привести вещественную матрицу A к треугольному

виду и указать соответствующую матрицу преобразования подобия, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

д) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; е) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

59.40. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве V.

1. Пусть $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_r = V$ – цепочка подпространств линейного пространства V, инвариантных относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, и $\dim L_i = n_i$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_r = n)$. Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V выбран так, что векторы $e_1, \ldots, e_{n_i}$ принадлежат L_i $(i = \overline{1,r})$. Показать, что матрица A_e – верхняя квазитреугольная с диагональными блоками порядков k_i, где $k_i = n_i - n_{i-1}$ $(i = \overline{2,r})$, $k_1 = n_1$.

2. Пусть в некотором базисе пространства V матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет верхнюю квазитреугольную форму. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ обладает системой вложенных друг в друга инвариантных подпространств. Выразить их размерности через порядки диагональных блоков.

59.40.1. Известно, что $f(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Найти характеристический многочлен этого оператора как оператора, действующего в вещественном пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

59.41. Найти все инвариантные подпространства для линейного оператора, имеющего в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрицу, совпадающую с жордановой клеткой $J_n(\lambda_0)$.

59.42. Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны. Доказать, что ядро и образ оператора $\mathcal{B}$ инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$.

59.43. Доказать, что всякое собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно любого оператора, перестановочного с $\mathcal{A}$.

59.44. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве, имеет n различных собственных значений, то любой оператор $\mathcal{B}$, перестановочный с $\mathcal{A}$, является оператором простой структуры. При этом все собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ будут также и собственными векторами оператора $\mathcal{B}$.

59.45. Доказать, что для перестановочных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ простой структуры существует базис пространства, составленный из общих собственных векторов.

59.46. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующие в n-мерном комплексном пространстве V, перестановочны и имеют простую структуру. Доказать, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – занумерованные с учетом алгебраической кратности собственные значения операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно, то собственными значениями оператора $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ будут числа

$$\lambda_1 + \mu_{i_1},\ \lambda_2 + \mu_{i_2}, \ldots,\ \lambda_n + \mu_{i_n},$$

где $i_1, \ldots, i_n$ – некоторая перестановка.

59.47. Доказать, что любые два перестановочных оператора комплексного пространства имеют общий собственный вектор.

59.48. Доказать, что для любого (хотя бы и бесконечного) множества G, состоящего из попарно перестановочных операторов комплексного пространства V, найдется собственный вектор, общий для всех операторов из G.

59.49. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ оператор $\mathcal{A}$ задан равенством $\mathcal{A}X = [A, X]$, где A – фиксированная матрица. Доказать, что следующие подпространства инвариантны относительно $\mathcal{A}$:

а) подпространство матриц с нулевым следом;

б) подпространство все верхних треугольных матриц (если матрица A верхняя треугольная);

в) множество всех кососимметрических матриц (если матрица A кососимметрическая);

г) множество всех диагональных матриц (если матрица A диагональная).

59.50. Линейный оператор $\mathcal{F}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$, определен формулой $\mathcal{F}X = A^TX + XA$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – фиксированная матрица.

1. Доказать, что симметрические матрицы образуют подпространство L_1, инвариантное относительно $\mathcal{F}$. Верно ли это для подпространства L_2 кососимметрических матриц?

2. Установить связь между собственными значениями инду-

цированного оператора $\mathcal{F}|L_1$ и собственными значениями матрицы A.

59.51. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ оператор $\mathcal{G}$ задан равенством $\mathcal{G}X = A^{-1}XA$, где A – фиксированная невырожденная матрица. Доказать, что следующие подпространства в $\mathbb{R}^{n\times n}$ инвариантны относительно $\mathcal{G}$:

а) множество всех матриц с нулевым следом;

б) множество всех скалярных матриц;

в) множество всех верхних треугольных матриц (если матрица A верхняя треугольная);

г) множество всех симметрических матриц и множество всех кососимметрических матриц (если матрица A ортогональная).

59.52. Линейный оператор $\mathcal{G}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$, определен равенством $\mathcal{G}X = A^{-1}XA$, где $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{G}|L$, индуцированного на подпространство L:

а) симметрических матриц;

б) матриц с нулевым следом.

59.53. Пусть λ_0 – собственное значение линейного оператора $\mathcal{A}$.

1. Доказать, что подпространства $L_k = \ker(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I})^k$, $k \in \mathbb{N}$, инвариантны относительно $\mathcal{A}$.

2. Показать, что $L_k \subset L_{k+1}$. Может ли это включение быть строгим?

59.54. Пусть пространство V является прямой суммой ненулевых подпространств L_1 и L_2: $V = L_1 \oplus L_2$.

1. Пусть $\mathcal{P}$ – оператор проектирования на L_1 параллельно L_2, а $\mathcal{A}$ – некоторый линейный оператор, действующий в V. Доказать, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$ перестановочны тогда и только тогда, когда каждое из подпространств L_1 и L_2 инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

2. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для оператора $\mathcal{R}$ отражения относительно L_1 параллельно L_2.

59.55. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы, действующие в n-мерном линейном пространстве V. Известно, что $\mathcal{A}^n = \mathcal{O}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 1$ и $[\mathcal{B}, \mathcal{A}] = \mathcal{A}$. Доказать, что оператор $\mathcal{B}$ имеет n собственных значений вида $\lambda, \lambda-1, \ldots, \lambda-n+1$, где λ – некоторое число.

59.56. Доказать, что перестановочные комплексные матрицы A и B можно привести к треугольной форме одним и тем же подобным преобразованием. Что означает это утверждение для коммутирующих операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$?

59.57. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – собственные значения матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – собственные значения матрицы $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (с учетом их алгебраических кратностей). Доказать, что:

а) mn произведений $\lambda_i\mu_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, дают в совокупности все собственные значения кронекерова произведения $A \otimes B$;

б) mn сумм $\lambda_i + \mu_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, дают в совокупности все собственные значения матрицы $A \otimes I_n + I_m \otimes B$.

59.58. Доказать, что индекс всякого нильпотентного оператора, действующего в n-мерном пространстве, не превосходит n.

59.59. Показать, что оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ в пространстве многочленов M_n является нильпотентным. Найти его индекс нильпотентности.

59.60. Доказать, что нильпотентный оператор не имеет отличных от нуля собственных значений.

59.61. Доказать, что оператор, действующий в комплексном пространстве, является нильпотентным тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю.

59.62. Доказать, что треугольная матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее диагональные элементы нулевые.

59.63. Доказать, что ненулевой нильпотентный оператор не может иметь простую структуру.

59.64. Пусть $\mathcal{A}$ – нильпотентный оператор с дефектом, равным единице. Доказать, что на любом своем инвариантном подпространстве оператор $\mathcal{A}$ индуцирует нильпотентный оператор с тем же дефектом.

59.65. Доказать, что квадратная матрица (вещественная или комплексная) нильпотентна тогда и только тогда, когда все корни ее характеристического многочлена равны нулю.

59.66. Пусть оператор $\mathcal{A}$ приводится парой подпространств L_1 и L_2. Доказать, что:

а) ранг оператора $\mathcal{A}$ равен сумме рангов операторов $\mathcal{A}|L_1$ и $\mathcal{A}|L_2$;

б) характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов операторов $\mathcal{A}|L_1$ и $\mathcal{A}|L_2$;

в) оператор $\mathcal{A}^k$ при любом $k \in \mathbb{Z}$ является прямой суммой операторов $(\mathcal{A}|L_1)^k$ и $(\mathcal{A}|L_2)^k$ (если $k < 0$, то предполагается, что оператор $\mathcal{A}$ обратим);

г) для любого многочлена $f(t)$ оператор $f(\mathcal{A})$ есть прямая сумма операторов $f(\mathcal{A}|L_1)$ и $f(\mathcal{A}|L_2)$.

59.67. Доказать, что оператор дифференцирования в пространстве многочленов M_n не приводится никакой парой подпространств.

59.68. Доказать, что если для оператора $\mathcal{A}$ любые два нетривиальных инвариантных подпространства имеют ненулевое пересечение, то оператор $\mathcal{A}$ не приводится никакой парой подпространств.

§60. Корневые подпространства. Жорданова форма

Теорема 60.1 (о расщеплении линейного оператора). *Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве V, с характеристическим многочленом*

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \text{ где } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j,$$

существуют инвариантные подпространства $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$ такие, что

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p};$$
$$\dim K_{\lambda_j} = m_j, \quad j = \overline{1,p};$$
$$f_j(\lambda) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j}, \quad j = \overline{1,p},$$

где $f_j(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}|K_{\lambda_j}$.

Следствие. Для любого линейного оператора, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму, у которой число диагональных клеток совпадает с числом различных собственных значений, а их размеры – с алгебраическими кратностями собственных значений, или, в матричной формулировке, *любая квадратная комплексная матрица подобна квазидиагональной матрице, обладающей указанным выше свойством.*

Подпространство K_{λ_j} определяется собственным значением λ_j оператора $\mathcal{A}$ и представляет собой ядро N_q оператора $(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^q$ в момент q, начиная с которого все ядра $N_{q+1}, N_{q+2}, \dots$ совпадают с N_q, т.е. K_{λ_j} состоит из всех векторов x, для которых $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k x = \theta$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$.

Пусть λ_j – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Вектор $x \in V$ называется *корневым вектором* оператора $\mathcal{A}$, *отвечающим собственному значению* λ_j, если $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k x = \theta$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. *Высотой* корневого вектора называется наименьшее k, обладающее указанным свойством.

Множество всех корневых векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению λ_j, называется *корневым подпространством* оператора $\mathcal{A}$, *отвечающим собственному значению* λ_j.

Таким образом, корневое подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее собственному значению λ_j, совпадает с подпространством K_{λ_j}, участвующим в расщеплении оператора $\mathcal{A}$ (теорема 60.1). Структура корневого подпространства K_{λ_j} определяется цепочкой вложений:

если $N_k = \ker(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$, то

$$W_{\lambda_j} = N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_q = K_{\lambda_j}, \tag{60.1}$$

где W_{λ_j} – собственное подпространство оператора, отвечающее собственному значению λ_j, q – максимальная высота корневого вектора, отвечающего собственному значению λ_j.

Отметим, что для операторов простой структуры, и только для них, эта цепочка обрывается на первом шаге:

$$W_{\lambda_j} = N_1 = K_{\lambda_j}.$$

Теорема 60.2. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ – линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V, и его характеристический многочлен имеет вид*

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \quad \text{где} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j.$$

Тогда в пространстве V существует базис e, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму

$$A_e = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & O \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{A_p} \end{bmatrix},$$

в которой матрицы A_j, $j = \overline{1,p}$, имеют вид

$$A_j = \begin{bmatrix} \boxed{J_{q_1}(\lambda_j)} & & & O \\ & \boxed{J_{q_2}(\lambda_j)} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{J_{q_{s_j}}(\lambda_j)} \end{bmatrix},$$

где

$$J_{q_i}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}$$

– клетка Жордана q_i-го порядка с λ_j на главной диагонали, количество всех клеток Жордана в матрице A_j равно геометрической кратности s_j собственного значения λ_j, $q_1 + q_2 + \ldots + q_{s_j} = m_j$, а количество клеток k-го порядка равно числу

$$t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1} = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}, \tag{60.2}$$

где $n_k = \dim N_k = \operatorname{def}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$, $r_k = \operatorname{rg}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$.

Следствие. Пусть $\mathcal{A}$ *– линейный оператор, действующий в* n*-мерном комплексном пространстве, и* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *– все его собственные значения, взятые с учетом их алгебраических кратностей. Тогда имеют место соотношения* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{tr} \mathcal{A}$, $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det \mathcal{A}$.

Полученная форма матрицы линейного оператора называется *жордановой формой*, а базис e, в котором матрица оператора имеет жорданову форму A_e, – *каноническим* (или *жордановым*) *базисом*.

Жорданова форма матрицы линейного оператора определена однозначно с точностью до порядка расположения клеток Жордана. Для операторов простой структуры, и только для них, жорданова форма совпадает с диагональной.

В матричной формулировке теорема 60.2 означает, что *любая квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму.*

Матрица A_e, имеющая жорданову форму и подобная матрице A, называется *жордановой формой матрицы* A.

Если $A = TA_eT^{-1}$, то столбцами матрицы T преобразования подобия являются векторы канонического базиса.

Теорема 60.3. *Две матрицы* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *подобны тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают.*

Теорема 60.4 (теорема Гамильтона–Кэли). *Линейный оператор, действующий в комплексном (или в вещественном) пространстве, является корнем своего характеристического многочлена.*

Пример 60.1. Построить корневые подпространства оператора в $\mathbb{R}^4$, заданного в естественном базисе матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A. Имеем

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2.$$

Все корни характеристического многочлена вещественны, поэтому к данному оператору применима общая теория операторов, действующих в комплексном пространстве. Оператор имеет два различных собственных значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$ алгебраических кратностей $m_1 = m_2 = 2$. Поэтому для него существуют два корневых подпространства K_{λ_1} и K_{λ_2}, $\dim K_{\lambda_1} = m_1 = 2$, $\dim K_{\lambda_2} = m_2 = 2$.

1. Построим K_{λ_1}. Для этого рассмотрим матрицу $B = A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ и найдем цепочку вложений (60.1).

Подпространство $N_1 = \ker B$ определяется однородной системой уравнений $Bx = 0$. Так как $\operatorname{rg} B = 3$, то $\dim N_1 = 1 < m_1$, так что $N_1 \neq K_{\lambda_1}$ и следует построить N_2.

Подпространство N_2 определяется однородной системой $B^2x = 0$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 12 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Так как $\operatorname{rg} B^2 = 2$, то $\dim N_2 = 2 = m_1$, так что $K_{\lambda_1} = N_2$. Таким образом, корневое подпространство K_{λ_1} определяется системой уравнений $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ и ее фундаментальная система решений $e_1 = (1,0,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0,0)^T$ образует базис K_{λ_1}.

2. Построим K_{λ_2}. Для этого рассмотрим матрицу $B = A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ и найдем цепочку вложений (60.1).

Подпространство N_1 определяется однородной системой уравнений $Bx = 0$, эквивалентной системе

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Так как $\operatorname{rg} B = 3$, то $\dim N_1 = 1 < m_2$, так что $N_1 \neq K_{\lambda_2}$ и следует построить N_2.

Подпространство N_2 определяется однородной системой уравнений $B^2x = 0$. Имеем:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -12 & 16 & 12 & -16 & 0 \\ -16 & 20 & 16 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 4 & 3 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Так как $\operatorname{rg} B^2 = 2$, то $\dim N_2 = 2 = m_2$, так что $K_{\lambda_2} = N_2$. Таким образом, корневое подпространство K_{λ_2} определяется системой уравнений $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$ и его базис образует фундаментальная система решений $e_3 = (1,0,1,0)^T$, $e_4 = (0,1,0,1)^T$.

Итак, оператор имеет два корневых подпространства $K_{\lambda_1} = \mathcal{L}(e_1, e_2)$ и $K_{\lambda_2} = \mathcal{L}(e_3, e_4)$, где $e_1 = (1,0,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0,0)^T$, $e_3 = (1,0,1,0)^T$, $e_4 = (0,1,0,1)^T$. ▪

Пример 60.2. Привести матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

подобным преобразованием к квазидиагональной форме с треугольным клетками на главной диагонали. Указать матрицу преобразования подобия.

Решение. Как следует из примера 60.1, оператор $\mathcal{A}$, определяемый матрицей A, обладает двумя корневыми подпространствами K_{λ_1}, K_{λ_2}, где $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\dim K_{\lambda_1} = 2$, $\dim K_{\lambda_2} = 2$. Следовательно, $\mathbb{R}^4 = K_{\lambda_1} \oplus K_{\lambda_2}$ и в базисе пространства, составленном как совокупность базисов K_{λ_1} и K_{λ_2}, матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix},$$

где A_1 и A_2 – матрицы операторов $\mathcal{A}|K_{\lambda_1}$ и $\mathcal{A}|K_{\lambda_2}$ в соответствующем базисе.

Найдем базисы, в которых клетки A_1 и A_2 имеют треугольный вид. Известно (пример 60.1), что если $B = A - \lambda_1 I$, $N_k = \ker B^k$, то

$$N_1 \subset N_2 = K_{\lambda_1},$$

где N_1 и N_2 определяются системами уравнений

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

соответственно. Построим базис N_1: $e_1 = (1,1,0,0)^T$ и дополним его до базиса N_2 вектором $e_2 = (1,0,0,0)^T$. Тогда $Ae_1 = -e_1$, $Ae_2 = 4e_1 - e_2$ и

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, векторы $e_3 = (1,1,1,1)^T$ и $e_4 = (1,0,1,0)^T$ образуют базис K_{λ_2}, в котором оператор $\mathcal{A}|K_{\lambda_2}$ имеет треугольную форму

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица A подобным преобразованием приводится к виду

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$T^{-1}AT = B$ и матрица T преобразования подобия имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Пример 60.3. Построить канонический базис и найти жорданову форму A_J матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Указать матрицу T подобного преобразования, приводящего матрицу A к жордановой форме: $T^{-1}AT = A_J$.

Решение. Метод выделения линейных множителей, примененный к $\det(A-\lambda I)$, дает характеристический многочлен матрицы A: $f(\lambda)=(\lambda-1)^4$. Следовательно, матрица A обладает единственным собственным значением $\lambda=1$, алгебраическая кратность которого равна четырем. Отвечающее ему корневое подпространство K_λ имеет размерность 4.

Построим корневое подпространство K_λ. Для этого рассмотрим матрицу

$$B=A-I=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Обозначим $N_k=\ker B^k$, $r_k=\operatorname{rg} B^k$, $n_k=\dim N_k$ (очевидно, $n_k=4-r_k$). Рассмотрим ядра $N_1, N_2, \ldots, N_q$ до момента q, когда ядро N_q будет совпадать с K_λ, т.е. когда $n_q=4$. Каждое ядро N_k определяется однородной системой уравнений $B^kx=0$.

1. N_1: $Bx=0$.

Эта система равносильна системе $\left[\begin{array}{cccc|c}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]$, из которой следует, что $r_1=2$, $n_1=2$ и общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases}x_2=x_1,\\ x_3=x_4,\end{cases}\quad x_1,x_4\in\mathbb{R}. \tag{60.3}$$

Так как $n_1<4$, то $N_1\neq K_\lambda$, и следовательно, необходимо перейти к N_2.

Заметим, что из того, что $n_1=2$ (n_1 – геометрическая кратность собственного значения $\lambda=1$), следует, что жорданова форма матрицы имеет ровно две жордановых клетки, однако размеры этих клеток пока неизвестны.

2. N_2: $B^2x=0$,

где $B^2=O$. Следовательно, $r_2=0$, $n_2=4$ и решением системы является любой вектор $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in\mathbb{R}^4$. Так как $n_2=4=\dim K_\lambda$, то корневое подпространство K_λ построено: $K_\lambda=N_2$.

Заметим, что равенство $n_2=4$ окончательно формирует жорданову форму матрицы, так как согласно (60.2) количество клеток второго порядка в ней равно числу $t_2=-n_1+2n_2-n_3=-n_1+2n_2-n_2=2$.

Теперь построим канонический базис K_λ.

Для этого найдем максимальную линейно независимую систему корневых векторов высоты 2, дополняющих какой-либо базис N_1 до базиса N_2. На основании соотношений (60.3) построим базис N_1: $(1,1,0,0)^T$, $(0,0,1,1)^T$, который дополним векторами $f_1=(0,1,0,0)^T$, $f_2=(0,0,0,1)^T$ до базиса $N_2=\mathbb{R}^4$. Каждый из векторов f_1 и f_2 порождает линейно независимые корневые векторы Bf_1 и Bf_2 высоты 1 (т.е. из N_1). Так как их количество равно размерности N_1, построение канонического базиса закончено. Жорданова «лестница» имеет вид

N_2	$f_1=(0,1,0,0)^T$, $f_2=(0,0,0,1)^T$
N_1	$Bf_1=(1,1,1,1)^T$, $Bf_2=(1,1,0,0)^T$

Нумерация векторов базиса производится по столбцам жордановой «лестницы», в каждом столбце векторы нумеруются снизу вверх. Итак, векторы

$e_1 = (1,1,1,1)^T$, $e_2 = (0,1,0,0)^T$, $e_3 = (1,1,0,0)^T$, $e_4 = (0,0,0,1)^T$ образуют канонический базис, жорданова форма имеет вид

$$A_J = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$T^{-1}AT = A_J$, где $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Заметим, что в выборе векторов f_1 и f_2 существует определенный произвол. Во избежание лишних вычислений предпочтение надо отдать единичным векторам (если это оказывается возможным), так как вычисление произведений Bf_1, $B^2f_1, \ldots$ сводится при этом к простому выделению соответствующих столбцов матриц B, $B^2, \ldots$. ▪

Пример 60.4. Построить канонический базис и найти жорданову форму матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид $f(\lambda) = \lambda^4$. Следовательно, матрица A обладает единственным собственным значением $\lambda = 0$ алгебраической кратности 4. Отвечающее ему корневое подпространство K_λ имеет размерность 4.

Как и в примере 60.3, цепочка вложений (60.1) имеет вид

$$N_1 \subset N_2 = K_\lambda,$$

причем $r_1 = 1$, $n_1 = 3$, общее решение, определяющее векторы из N_1, имеет вид

$$x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 \tag{60.4}$$

при любых x_2, x_3, x_4; $r_2 = 0$, $n_2 = 4 = \dim K_\lambda$ и любой вектор $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ является вектором из N_2.

Заметим, что из того, что $n_1 = 3$, следует, что жорданова форма матрицы имеет ровно три жордановых клетки. Очевидно, что это могут быть лишь одна клетка второго порядка и две клетки первого порядка, так что жорданова форма матрицы A уже определена.

Построим канонический базис.

Так как $n_2 - n_1 = 1$, то единственный корневой вектор высоты 2 – вектор $f_1 = (1,0,0,0)^T$ – может быть получен как дополнение базиса N_1: $(-1,1,0,0)^T$, $(1,0,1,0)^T$, $(1,0,0,1)^T$ (воспользоваться (60.4)) до базиса N_2. Вектор f_1 порождает корневой вектор высоты 1 – вектор $Bf_1 = (1,1,1,1)^T$. Так как $\dim N_1 = 3$, то вектор Bf_1 необходимо дополнить двумя векторами g_1 и g_2 до базиса N_1. Чтобы найти эти векторы, опять воспользуемся общим

решением (60.4):

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	1	1	Bf_1
1	0	1	0	g_1
1	0	0	1	g_2

Таким образом, жорданова «лестница» имеет вид

N_2	$f_1 = (1,0,0,0)^T$,
N_1	$Bf_1 = (1,1,1,1)^T$, $g_1 = (1,0,1,0)^T$, $g_2 = (1,0,0,1)^T$

и векторы $e_1 = (1,1,1,1)^T$, $e_2 = (1,0,0,0)^T$, $e_3 = (1,0,1,0)^T$, $e_4 = (1,0,0,1)^T$ образуют канонический базис, жорданова форма имеет вид

$$A_J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad \blacksquare$$

Пример 60.5. Найти канонический базис и жорданову форму матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Как следует из примера 60.1, данная матрица обладает двумя корневыми подпространствами K_{λ_1} и K_{λ_2}, отвечающими собственным значениям $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$ алгебраических кратностей 2, так что $\dim K_{\lambda_1} = \dim K_{\lambda_2} = 2$.

Канонический базис пространства представляет собой совокупность канонических базисов корневых подпространств K_{λ_1} и K_{λ_2}. Рассмотрим по-отдельности эти подпространства.

Для подпространства K_{λ_1} имеет место (см. пример 60.1) цепочка вложений

$$N_1 \subset N_2 = K_{\lambda_1},$$

где $n_1 = 1$ (так что в жордановой форме матрицы ровно одна жорданова клетка с $\lambda_1 = -1$ на главной диагонали, причем второго порядка, так как $\dim K_{\lambda_1} = 2$), $n_2 = 2$, общее решение для векторов из N_1 имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases} \tag{60.5}$$

при любых x_2, а для векторов из N_2 – вид

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases} \tag{60.6}$$

при любых x_1, x_2.

Соотношения (60.5) и (60.6) позволяют найти базис $(1,1,0,0)^T$ пространства N_1 и дополняющий его до базиса N_2 вектор $f_1 = (1,0,0,0)^T$:

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	1	0	0	N_1	N_2
1	0	0	0	f_1	

Вектор f_1 – единственный корневой вектор высоты 2, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = -1$ (так как $n_2 - n_1 = 1$), он порождает корневой вектор $Bf_1 = (4,4,0,0)^T$ высоты 1. Так как $n_1 = 1$, построение канонического базиса подпространства K_{λ_1} закончено: $e_1 = (4,4,0,0)^T$, $e_2 = (1,0,0,0)^T$.

Аналогично строится канонический базис K_{λ_2}. Здесь цепочка вложений имеет вид

$$N_1 \subset N_2 = K_{\lambda_2},$$

где $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, общее решение для векторов из N_1 имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = x_4, \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

при любом x_4, а для векторов из N_2 – вид

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

при любых x_3, x_4.

Поступая так же, как и в подпространстве K_{λ_1}, находим вектор $f_1 = (0,1,0,1)^T$, дополняющий базис $(1,1,1,1)^T$ подпространства N_1 до базиса N_2. Вектор $Bf_1 = (-2,-2,-2,-2)^T$ завершает построение канонического базиса K_{λ_2}: $e_3 = (-2,-2,-2,-2)^T$, $e_4 = (0,1,0,1)^T$.

Таким образом, канонический базис пространства – это векторы $e_1 = (4,4,0,0)^T$, $e_2 = (1,0,0,0)^T$, $e_3 = (-2,-2,-2,-2)^T$, $e_4 = (0,1,0,1)^T$, а жорданова форма матрицы A имеет вид

$$A_J = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \quad \blacksquare$$

Пример 60.6. Найти канонический базис и жорданову форму матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы A в силу ее квазитреугольной структуры равен:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^5.$$

Следовательно, $\lambda = 2$ – единственное собственное значение матрицы A алгебраической кратности 5. Отвечающее ему корневое подпространство K_λ имеет размерность 5.

Для построения корневого подпространства K_λ рассмотрим матрицу

$$B = A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

и изучим ядра $N_k = \ker B^k$.

1. N_1: $Bx = 0$.

Эта система равносильна системе $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, из которой следует, что $n_1 = \dim N_1 = 2$ и общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_4 = x_5 = 0, \quad \forall x_1, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Так как $n_1 < 5$, то $N_1 \neq K_\lambda$, и следовательно, необходимо перейти к N_2.

2. N_2: $B^2x = 0$, где $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Следовательно, подпространство N_2 описывается уравнением

$$x_4 = x_5$$

при любых x_1, x_2, x_3, x_5, и, кроме того, $n_2 = \dim N_2 = 4$. Так как $n_2 < 5$, то $N_2 \neq K_\lambda$, и следует перейти к N_3.

3. N_3: $B^3x = 0$,

где $B^3 = O$. Отсюда вытекает, что $n_3 = 5 = \dim K_\lambda$ и решением системы является любой вектор $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5$.

Тем самым, корневое подпространство K_λ построено и цепочка вложений имеет вид:

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 = K_\lambda.$$

Построим теперь канонический базис K_λ.

Так как $n_3 - n_2 = 1$, то единственный корневой вектор f_1 высоты 3 должен дополнять какой-либо базис N_2 до базиса N_3:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	0	0	1	1	N_2	N_3
0	0	1	0	0		
0	1	0	0	0		
1	0	0	0	0		
0	0	0	0	1	f_1	

Корневой вектор $f_1 = (0, 0, 0, 0, 1)^T$ порождает корневой вектор $Bf_1 = (0, 1, -2, -3, -3)^T$ высоты 2 и корневой вектор $B^2f_1 = (-1, -8, 8, 0, 0)^T$ высоты 1.

Так как $n_2 - n_1 = 2$, то необходимо построить два корневых вектора g_1, g_2 высоты 2, дополняющих какой-либо базис N_1 до базиса N_2. В качестве g_1 возьмем уже имеющийся вектор Bf_1, а вектор g_2 найдем аналогично тому, как это было сделано выше:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	−1	0	0	N_1	N_2
1	0	0	0	0		
0	1	−2	−3	−3	Bf_1	
0	0	1	0	0	g_2	

Корневой вектор $g_2 = (0,0,1,0,0)^T$ порождает корневой вектор $Bg_2 = (1,2,-2,0,0)^T$ высоты 1.

Так как $n_1 = 2$, то базис N_1 состоит из двух корневых векторов высоты 1. Такие векторы уже построены: B^2f_1 и Bg_2, поэтому все векторы, входящие в канонический базис, найдены.

Жорданова «лестница» имеет вид:

N_3	$f_1 = (0,0,0,0,1)^T$
N_2	$Bf_1 = (0,1,-2,-3,-3)^T$, $g_2 = (0,0,1,0,0)^T$
N_1	$B^2f_1 = (-1,-8,8,0,0)^T$, $Bg_2 = (1,2,-2,0,0)^T$

поэтому векторы канонического базиса нумеруются так:

$$e_1 = B^2f_1,\ e_2 = Bf_1,\ e_3 = f_1,\ e_4 = Bg_2,\ e_5 = g_2,$$

а жорданова форма матрицы A состоит из двух клеток размеров 3 и 2:

$$A_J = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Матрица T преобразования подобия ($T^{-1}AT = A_J$) имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Корневые подпространства

60.1. Доказать, что корневой вектор высоты 1 является собственным вектором.

60.2. Пусть f – корневой вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ_i и имеющий высоту q ($q > 0$). Доказать, что:

а) вектор $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})f$ имеет высоту $q - 1$;

б) вектор $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})f$, где λ_j – отличное от λ_i собственное значение оператора $\mathcal{A}$, имеет высоту q;

в) если λ_i – корень многочлена $f(\lambda)$ кратности $l \leq q$, то вектор $f(\mathcal{A})f$ имеет высоту $q - l$;

г) если $\mathcal{A}$ обратим, то вектор $\mathcal{A}^{-1}f$ имеет высоту q;

д) если $\mathcal{B}$ – оператор, перестановочный с $\mathcal{A}$, то высота вектора $\mathcal{B}f$ не превосходит q.

60.3. Пусть f_1, f_2 – корневые векторы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие одному собственному значению λ_i и имеющие ненулевые высоты q_1 и q_2, причем $q_1 > q_2$. Доказать, что для любого числа α вектор $f_1 + \alpha f_2$ также является корневым, причем его высота равна q_1.

60.4. Доказать, что в корневом подпространстве существует базис, состоящий из корневых векторов максимально возможной в этом подпространстве высоты.

60.5. Доказать, что ненулевые корневые векторы различных высот, отвечающие одному собственному значению, линейно независимы.

60.6. Доказать, что ненулевые корневые векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

60.7. Показать, что корневой вектор f оператора $\mathcal{A}$ будет корневым вектором той же высоты: а) для оператора $\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I}$; б) для оператора $\mathcal{A}^{-1}$, если $\mathcal{A}$ обратим.

60.8. Пусть f – вектор из K_λ, имеющий высоту q. Показать, что:

а) система векторов

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{q-1}f,\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{q-2}f, \ldots, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})f,\ f \qquad (60.7)$$

линейно независима;

б) линейная оболочка системы (60.7) является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}$.

Систему векторов (60.7) называют *серией, порожденной вектором* f, а ее линейную оболочку – *циклическим подпространством, порожденным вектором* f.

60.9. Пусть L – циклическое подпространство, порожденное корневым вектором f высоты q оператора $\mathcal{A}$. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}|L$ в базисе (60.7).

60.10. Пусть L – циклическое подпространство, порожденное вектором $f \in K_\lambda$ высоты q оператора $\mathcal{A}$. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}|L$ в базисе $f, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})f, \ldots, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{q-1}f$.

60.11. Доказать, что если K_{λ_i} – корневое подпространство оператора $\mathcal{A}$, соответствующее собственному значению λ_i, то:

а) K_{λ_i} есть корневое подпространство оператора $\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I}$, соответствующее собственному значению $\lambda_i - \lambda_0$;

б) K_{λ_i} есть корневое подпространство оператора $\mathcal{A}^{-1}$, соответствующее собственному значению $1/\lambda_i$, если оператор $\mathcal{A}$ обратим.

60.12. Показать, что:

а) высота всякого вектора из K_{λ_i} не превосходит алгебраической кратности собственного значения λ_i;

б) множество всех векторов из K_{λ_i}, высота которых не превосходит заданного $k \in \mathbb{N}$, является подпространством, инвариантным относительно $\mathcal{A}$.

60.13. Доказать, что всякое корневое подпространство оператора $\mathcal{A}$ является инвариантным подпространством любого оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с $\mathcal{A}$.

60.14. Показать, что для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ имел простую структуру, необходимо и достаточно, чтобы для каждого собственного значения λ_i этого оператора собственное подпространство W_{λ_i} совпадало с корневым подпространством K_{λ_i}.

60.15. Доказать, что оператор простой структуры не имеет корневых векторов высоты больше единицы.

60.16. Доказать, что оператор простой структуры $\mathcal{A}$ на каждом своем инвариантном подпространстве индуцирует оператор простой структуры.

Построить корневые подпространства следующих матриц.

60.17. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **60.18.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

60.19. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. **60.20.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

60.20.1. Построить корневые подпространства следующих операторов, действующих в пространстве M_3:

а) $\mathcal{A}f(t) = f(1+t) + f(1-t)$;

б) $\mathcal{A}f(t) = f(1+t) - f(1-t)$;

в) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) + f(-t)$;

г) $\mathcal{A}f(t) = f(t-1) + f(-t)$.

Одноклеточные операторы

60.21. Оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве V, называется *одноклеточным*, если максимально возможная высота его корневых векторов совпадает с размерностью n пространства. Доказать, что:

а) всякий базис пространства V содержит по крайней мере один вектор высоты n;

б) если f – вектор высоты n, отвечающий собственному значению λ_0, то система векторов $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})^{n-1}f$, $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})^{n-2}f$, …, $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})f$, f, т.е. серия, порожденная вектором f, является базисом пространства V;

в) оператор обладает единственным собственным значением;

г) матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе пункта "б)" есть жорданова клетка порядка n, отвечающая этому собственному значению.

60.22. В условиях предыдущей задачи найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе f, $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})f$, …, $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})^{n-2}f$, $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})^{n-1}f$.

60.23. Пусть $\mathcal{A}$ – одноклеточный оператор и f – его корневой вектор максимальной высоты n, отвечающий собственному значению λ_0. Найти его матрицу в базисе f, $\mathcal{A}f$, …, $\mathcal{A}^{n-1}f$ и сравнить ее с с сопровождающей матрицей[6] многочлена $(\lambda-\lambda_0)^n$.

Построить канонический базис и найти жорданову форму следующих матриц.

60.24. $\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. **60.25.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **60.26.** $\begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix}$.

60.27. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **60.28.** $\begin{bmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

[6] См. §57, задачу 57.91.

Найти жорданову форму следующих матриц порядка n.

60.29. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.30. $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, где $\alpha \neq 0$.

60.31. $\begin{bmatrix} 9 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 9 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 9 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 9 \end{bmatrix}$, где $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \neq 0$.

60.32. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

60.33. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

60.34. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$.

60.35. $\begin{bmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}$, где $a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n} \neq 0$.

60.36. Найти канонический базис и жорданову форму оператора $\mathcal{D}$ дифференцирования в пространстве многочленов M_n.

60.37. Доказать, что если $\mathcal{A}$ – одноклеточный оператор с собственным значением $\lambda_0 \neq 0$, то одноклеточными будут также:

а) оператор $\mathcal{A}^2$;

б) оператор $\mathcal{A}^l$ для любого натурального числа l;

в) оператор $\mathcal{A}^{-1}$.

60.38. Показать, что если $\mathcal{A}$ – одноклеточный оператор с нулевым собственным значением, действующий в пространстве размерности $n > 1$, то оператор $\mathcal{A}^2$ уже не будет одноклеточным.

60.39. Доказать, что для одноклеточного оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ_0 дефект оператора $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})^k$ при $k = \overline{1,n}$ равен k.

60.40. Доказать, что одноклеточный оператор $\mathcal{A}$ с собственным значением λ_0 не имеет нетривиальных инвариантных подпространств, отличных от подпространств $\ker(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})^k$.

60.41. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – перестановочные одноклеточные операторы. Доказать, что инвариантные подпространства этих операторов совпадают.

Жорданова форма (общий случай). Критерий подобия

60.42. Пусть корневые векторы $f_1, \dots, f_p$ оператора $\mathcal{A}$, отвечающие собственному значению λ_0, образуют линейно независимую систему векторов высоты q, для которых никакая нетривиальная линейная комбинация не является корневым вектором высоты $q-1$. Доказать, что векторы $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})f_1, \dots, (\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I})f_p$ образуют линейно независимую систему векторов высоты $q-1$, для которой никакая нетривиальная линейная комбинация не является корневым вектором высоты $q-2$.

60.43. Доказать, что в условиях предыдущей задачи серии, построенные исходя из векторов $f_1, \dots, f_p$, образуют в совокупности линейно независимую систему.

60.44. Доказать, что корневое подпространство разложимо в прямую сумму циклических подпространств.

Построить канонический базис и найти жорданову форму следующих матриц.

60.45. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. **60.46.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

60.47. $\begin{bmatrix} 99 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{bmatrix}$. **60.48.** $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

60.49. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

60.50. Найти канонический базис и жорданову форму оператора $\mathcal{D}^2$ двукратного дифференцирования в пространстве многочленов M_n, предполагая, что $n = 2k + 1$ – нечетное число.

Построить канонический базис и найти жорданову форму следующих матриц.

60.51. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. **60.52.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

60.53. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. **60.54.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

60.55. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. **60.56.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

60.57. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. **60.57.1.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

60.57.2. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **60.57.3.** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

60.58. Найти канонический базис и жорданову форму оператора $\mathcal{D}^2$ двукратного дифференцирования в пространстве многочленов M_n, предполагая, что $n = 2k$ – четное число.

60.59. Может ли в пространстве размерности 8 существовать нильпотентный оператор $\mathcal{A}$, для которого числа $r_k = \operatorname{rg} \mathcal{A}^k$ составляют последовательность $6, 4, 3, 1, 0$?

Построить канонический базис и найти жорданову форму следующих матриц.

60.60. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **60.61.** $\begin{bmatrix} 15 & -6 & -6 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{bmatrix}$.

60.62. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -9 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. **60.63.** $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

60.64. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **60.65.** $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

60.66. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. **60.67.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$.

60.68. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. **60.69.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.70. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. **60.71.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.72. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. **60.73.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

60.74. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **60.75.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

60.76. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **60.77.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

60.77.1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **60.77.2.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

60.77.3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **60.77.4.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

60.77.5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. **60.77.6.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

60.77.7. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **60.77.8.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

60.78. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

60.79. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.80. Доказать, что в любой жордановой форме оператора $\mathcal{A}$ число жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_0, равно дефекту оператора $\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I}$.

60.81. Доказать, что в любой жордановой форме оператора $\mathcal{A}$ число жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_0 и имеющих порядок, больший или равный k, определяется формулой $l_k = n_k - n_{k-1}$, где $n_0 = 0$, $n_k = \operatorname{def}(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I})^k$.

60.82. Из результата предыдущей задачи вывести соотношение $t_k = 2n_k - n_{k+1} - n_{k-1}$, где t_k – число жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_0 и имеющих порядок k.

60.83. Оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном комплексном пространстве V, имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ геометрических кратностей $s_1, \ldots, s_k$ соответственно. Определить, сколько ненулевых элементов в жордановой форме оператора $\mathcal{A}$.

Не вычисляя канонического базиса, найти жорданову форму следующих матриц.

60.84. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **60.85.** $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 & 7 & 9 & 14 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}$.

60.86. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **60.87.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

60.88. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

60.89. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

60.90. Найти k-ю степень жордановой клетки $J_n(\alpha)$ порядка n.

60.91. Доказать, что значение многочлена $f(A)$ от клетки Жордана $A = J_n(\lambda)$ определяется формулой

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'''(\lambda)}{3!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

60.92. Найти жорданову форму квадрата жордановой клетки, на диагонали которой стоит число $\alpha \neq 0$.

60.93. Найти жорданову форму квадрата жордановой клетки с нулем на главной диагонали (нильпотентной клетки Жордана).

60.94. Векторы канонического базиса оператора $\mathcal{A}$ занумеровали в обратном порядке. Как изменится матрица оператора в этом случае?

60.95. Зная жорданову форму оператора $\mathcal{A}$, найти жорданову форму оператора: а) $\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{I}$; б) $\mathcal{A}^{-1}$.

60.96. Найти жорданову форму матрицы

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

порядка $n \geq 3$.

60.97. Показать, что если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном пространстве (среди этих чисел могут быть и равные), то собственными значениями многочлена $f(\mathcal{A})$ будут числа $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$.

60.98. Доказать, что всякий оператор, действующий в комплексном пространстве, является прямой суммой одноклеточных операторов.

60.99. Доказать, что всякий оператор, действующий в комплексном пространстве, можно представить в виде суммы оператора простой структуры и нильпотентного оператора.

60.100. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ и не являющийся скалярным, есть оператор отражения.

60.101. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}^k = \mathcal{I}$ для некоторого натурального числа k, является оператором простой структуры.

60.102. Найти жорданову форму идемпотентного оператора $\mathcal{A}$, т.е. оператора, удовлетворяющего условию $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

60.103. В пространстве многочленов M_8 найти жорданову форму разностного оператора $\mathcal{A}_1 f(t) = f(t+1) - f(t)$.

60.104. В пространстве многочленов M_8 найти жорданову форму:

а) оператора трехкратного дифференцирования;

б) оператора $\mathcal{A}_2 f(t) = f(t+2) - 2f(t+1) + f(t)$;

в) оператора $\mathcal{A}_3 f(t) = f(t+3) - 3f(t+2) + 3f(t+1) - f(t)$.

60.104.1. Зная жорданову форму A_J матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, найти жорданову форму оператора, действующего в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ по правилу: $\mathcal{G}X = AX$.

60.105. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве, невырожден, то обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ можно представить многочленом степени $n-1$ от $\mathcal{A}$.

60.106. Доказать, что жорданова клетка $J_k(\lambda_0)$ аннулируется многочленом $f(t)$ тогда и только тогда, когда число λ_0 является корнем этого многочлена кратности не менее k.

60.107. Что можно сказать о жордановой форме оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^2$?

60.108. Пусть $f(t)$ – заданный многочлен с комплексными коэффициентами степени $n \geq 1$. Найти необходимые и достаточные условия того, что квадратная матрица X порядка m $(m \geq 2)$ удовлетворяет уравнению $f(X) = O$.

60.109. Пусть характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ разложен в произведение многочленов $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$, не имеющих общих корней. Доказать, что

$$\ker f_1(\mathcal{A}) = \operatorname{im} f_2(\mathcal{A}), \quad \ker f_2(\mathcal{A}) = \operatorname{im} f_1(\mathcal{A}).$$

Выяснить, являются ли подобными указанные матрицы A, B и C.

60.110. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -12 & 8 & 20 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -219 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -218 \end{bmatrix}$.

60.111. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

60.112. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 \\ -10 & 18 & -10 \\ -12 & 24 & -14 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 16 & 12 \\ 4 & -28 & -20 \end{bmatrix}$.

60.113. Доказать, что всякая комплексная матрица A подоб-

на транспонированной матрице A^T.

60.114. Что можно сказать о жордановой форме матрицы A, если A подобна обратной матрице A^{-1}?

60.114.1. Найти жорданову форму нильпотентной матрицы порядка n ($n \geq 4$) с индексом нильпотентности, равным: а) n; б) $n-1$.

60.114.2. Доказать, что для невырожденной жордановой клетки $J_n(\alpha)$ найдется матрица B, для которой $B^2 = J_n(\alpha)$.

60.114.3. Используя результат предыдущей задачи, показать, что для любой невырожденной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ найдется матрица B, для которой $B^2 = A$.

60.114.4. Доказать, что равенство $X^2 = J_n(0)$ не выполнено ни для одной квадратной матрицы X.

60.114.5. Доказать, что для квазидиагональной матрицы $A = \operatorname{diag}(J_n(0), J_n(0))$ найдется квадратная матрица B, для которой $B^2 = A$.

60.115. Пусть A – нильпотентная матрица, k – максимальный размер жордановых клеток матрицы A. Доказать, что индекс нильпотентности матрицы A равен k.

60.116. Доказать, что матрица A порядка n нильпотентна тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr}(A^p) = 0$ для $p = \overline{1,n}$.

60.117. Доказать, что жорданова клетка подобна сопровождающей матрице[7] своего характеристического многочлена (матрице Фробениуса).

60.118. Доказать, что всякая комплексная матрица подобна квазидиагональной матрице, у которой все диагональные клетки являются матрицами Фробениуса.

60.119. Квадратная матрица A порядка m имеет простую структуру; известна жорданова форма J матрицы B порядка n. Найти жорданову форму матрицы: а) $A \otimes B$; б) $A \otimes I_n + I_m \otimes B$.

60.120. Найти жорданову форму матрицы порядка n

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \varepsilon & & & & 1 \end{bmatrix},$$

[7] См. §57, задачу 57.91.

где ϵ – положительно и стоит в позиции $(n, 1)$, а не указанные внедиагональные элементы равны нулю.

60.121. В жордановой форме матрицы A заменим внедиагональные элементы, равные единице (если таковые имеются), произвольным числом $\epsilon \neq 0$. Доказать, что полученная матрица подобна матрице A.

Глава XVI. Линейные операторы в унитарном и евклидовом пространствах

§61. Сопряженный оператор

Пусть V и W – два пространства, оба унитарных или оба евклидовых, и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^* : W \to V$ называется *сопряженным оператором к оператору* $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y), \quad \forall x \in V, \, y \in W.$$

Теорема 61.1. *Сопряженный оператор линеен.*

Теорема 61.2. *Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ существует, и притом единственный, сопряженный оператор.*

Теорема 61.3. *Операция сопряжения линейного оператора обладает следующими свойствами:*

1) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,
2) $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$,
3) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$,
4) $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$;
5) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$,

выполненными для любых операторов, для которых определены указанные операции.

Теорема 61.4. *Если e и f – ортонормированные базисы пространств V и W соответственно, то*

$$(\mathcal{A}^*)_{ef} = (A_{fe})^H.$$

Следствие. $\operatorname{rg}\mathcal{A} = \operatorname{rg}\mathcal{A}^*$.

Теорема 61.5. *Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$*

$$\ker\mathcal{A} = (\operatorname{im}\mathcal{A}^*)^\perp, \quad \operatorname{im}\mathcal{A}^* = (\ker\mathcal{A})^\perp.$$

Два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ пространства V называются *биортогональной парой базисов*, если $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Теорема 61.6. *Для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ унитарного (евклидова) пространства существует, и притом единственный, биортогональный базис $f_1, \ldots, f_n$.*

Теорема 61.7. *В паре биортогональных базисов e и f унитарного (евклидова) пространства V матрицы действующих в нем линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ связаны соотношением*

$$(\mathcal{A}^*)_f = (A_e)^H.$$

Теорема 61.8. *Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве V (унитарном или евклидовом):*

1) *если e – ортонормированный базис V, то*

$$(\mathcal{A}^*)_e = (A_e)^H;$$

2) *выполнены равенства*

$$\det \mathcal{A}^* = \overline{\det \mathcal{A}}, \quad \operatorname{rg} \mathcal{A}^* = \operatorname{rg} \mathcal{A};$$

3) *если подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.*

Теорема 61.9 (теорема Шура). *Для любого линейного оператора, действующего в унитарном пространстве, существует ортонормированный базис, в котором он имеет треугольную матрицу.*

Следствие. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения оператора $\mathcal{A}$, то собственными значениями оператора $\mathcal{A}^*$ будут числа $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}$.

Ортонормированный базис унитарного (евклидова) пространства, в котором матрица линейного оператора имеет треугольную форму, называется *базисом Шура* для этого оператора.

Пример 61.1. Найти сопряженный оператор для оператора $\mathcal{A}$, действующего в геометрическом пространстве V_3 по правилу: $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – фиксированный вектор.

Решение. Покажем, что $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. С одной стороны, для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_3$: $(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y})$. С другой стороны:

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([\mathbf{x}, \mathbf{a}], \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}) = (\mathbf{x}, -[\mathbf{y}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{x}, -\mathcal{A}\mathbf{y}).$$

Таким образом, $(\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, -\mathcal{A}\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_3$, следовательно (задача 61.1), $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. ▪

Пример 61.2. Линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит векторы $b_1 = (2, 3, 5)$, $b_2 = (0, 1, 2)$, $b_3 = (1, 0, 0)$ в векторы $c_1 = (1, 1, 1)$, $c_2 = (1, 1, -1)$, $c_3 = (2, 1, 2)$ соответственно. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}^*$ в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, в котором заданы координаты всех векторов.

Решение. Заметим, что векторы b_1, b_2, b_3 линейно независимы, следовательно, оператор $\mathcal{A}$ определен однозначно. Легко показать (см. пример 52.10 §52), что $A_e = CB^{-1}$, где столбцы матрицы B и C совпадают с b_1, b_2, b_3 и c_1, c_2, c_3 соответственно. Использование метода Жордана (§8) обращения матрицы дает матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как e_1, e_2, e_3 – ортонормированный базис, то $(\mathcal{A}^*)_e = (A_e)^T$, т.е.

$$(\mathcal{A}^*)_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -11 & -7 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \quad ▪$$

Пример 61.3. [1] Написать уравнения гиперплоскостей, инвариантных относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -23 & 17 \\ 11 & -43 & 30 \\ 15 & -54 & 37 \end{bmatrix}.$$

[1] Ср. с примером 59.8, §59.

Решение. Все двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора $\mathcal{A}$, являются ортогональными дополнениями к одномерным инвариантным подпространствам оператора $\mathcal{A}^*$, т.е. линейным оболочкам $\mathcal{L}(e)$ собственных векторов e оператора $\mathcal{A}^*$. Найдем собственные значения матрицы A^T:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 11 & 15 \\ -23 & -43-\lambda & -54 \\ 17 & 30 & 37-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{прибавим к 1-} \\ \text{й строке 2-ю и} \\ \text{3-ю строки} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda & -2-\lambda \\ -23 & -43-\lambda & -54 \\ 17 & 30 & 37-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda^2+3).$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}^*$ имеет единственное собственное значение $\lambda = -2$, которому отвечает единственный линейно независимый собственный вектор $e = (3,-3,1)$. Искомое инвариантное подпространство, являясь ортогональным дополнением к $\mathcal{L}(e)$, определяется уравнением

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Пример 61.4. В пространстве M_2 многочленов степени не выше 2 скалярное произведение задано формулой

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt, \tag{61.1}$$

причем $a = -1$, $b = 1$. Найти оператор $\mathcal{D}^*$, сопряженный к оператору $\mathcal{D}$ дифференцирования в M_2.

Решение. Рассмотрим в пространстве M_2 естественный базис $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$, $e_3(t) = t^2$. Нетрудно показать, что этот базис не является даже ортогональным базисом относительно введенного в этой задаче скалярного произведения (например, $(e_1, e_3) = 2/3 \neq 0$). Поэтому для матриц D_e оператора $\mathcal{D}$ и $(\mathcal{D}^*)_e$ сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$ равенство $(\mathcal{D}^*)_e = D_e^T$, вообще говоря, не справедливо.

Для построения матрицы $(\mathcal{D}^*)_e$ воспользуемся соотношением:

$$(\mathcal{D}e_i, e_j) = (e_i, \mathcal{D}^* e_j) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{kj}(e_i, e_k), \quad i,j = \overline{1,3}, \tag{61.2}$$

где $(\mathcal{D}^*)_e = (\alpha_{kj}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

При каждом $j = \overline{1,3}$ соотношения (61.2) с $i = 1,2,3$ образуют систему линейных уравнений относительно неизвестных α_{1j}, α_{2j}, α_{3j} с квадратной матрицей коэффициентов, совпадающей с матрицей Грама базиса e_1, e_2, e_3, и следовательно, (теорема 47.5 §47) невырожденной. Поэтому эта система уравнений совместна и определенна при любых правых частях.

Матрица Грама базиса e_1, e_2, e_3 равна

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

Правые части систем имеют вид:

– при $j = 1$

$$(\mathcal{D}e_1, e_1) = 0,\ (\mathcal{D}e_2, e_1) = 2,\ (\mathcal{D}e_3, e_1) = 0;$$

– при $j = 2$

$$(\mathcal{D}e_1, e_2) = 0,\ (\mathcal{D}e_2, e_2) = 0,\ (\mathcal{D}e_3, e_2) = 4/3;$$

– при $j = 3$

$$(\mathcal{D}e_1, e_3) = 0,\ (\mathcal{D}e_2, e_3) = 2/3,\ (\mathcal{D}e_3, e_3) = 0.$$

Решая все три системы одновременно:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 & 4/3 & 0 \end{array}\right]$$

получим $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{21} = 3$, $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{12} = -5/2$, $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{32} = 15/2$, $\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{23} = 1$, $\alpha_{33} = 0$. Таким образом,

$$(\mathcal{D}^*)_e = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -5/2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 15/2 & 0 \end{array}\right].$$

Пользуясь полученной матрицей, установим, как действует сопряженный оператор $\mathcal{D}^*$ на произвольный многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in M_2$:

$$\mathcal{D}^* f(t) = a_0 \mathcal{D}^* e_1(t) + a_1 \mathcal{D}^* e_2(t) + a_2 \mathcal{D}^* e_3(t) =$$

$$= a_0 \cdot 3t + a_1\left(-\frac{5}{2} + \frac{15}{2}t^2\right) + a_2 t = -\frac{5}{2}a_1 + (3a_0 + a_2)t + \frac{15}{2}a_1 t^2. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Задание линейного оператора в евклидовом (унитарном) пространстве

61.1. Пусть V и W – унитарные (евклидовы) пространства, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы из $\mathcal{L}(V, W)$. Доказать, что если для любых $x \in V$, $y \in W$ выполнено соотношение

$$(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{B}x, y),$$

то операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают.

61.2. В унитарных (евклидовых) пространствах V и W фиксированы некоторые базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ соответственно. Известно, что для линейных операторов $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, V)$ выполнены соотношения

$$(\mathcal{A}e_i, f_j) = (e_i, \mathcal{B}f_j), \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}.$$

Доказать, что в таком случае $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$.

61.3. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ переводит ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V в систему векторов $f_1, \ldots, f_n$ из W. Доказать, что:

а) $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)f_i$, $\forall x \in V$; б) $\mathcal{A}^*y = \sum_{i=1}^{n}(y, f_i)e_i$, $\forall y \in W$.

61.4. Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом (унитарном) пространстве V. Доказать, что

$$\operatorname{tr}\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{A}e_i, e_i)$$

для любого ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ рассматриваемого пространства V.

61.4.1. Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом (унитарном) пространстве V, и $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ – пара биортогональных базисов в V. Доказать, что

$$\operatorname{tr}\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}e_k, f_k).$$

61.5. Пусть $e_1 \ldots, e_k$ – ортонормированный базис подпространства L евклидова пространства V. Используя скалярные произведения $(y, e_1), \ldots, (y, e_k)$, найти образ произвольного вектора $y \in V$ для оператора:

а) ортогонального проектирования на подпространство L;

б) ортогонального проектирования на подпространство $L^\perp$;

в) ортогонального отражения относительно подпространства L;

г) ортогонального отражения относительно подпространства $L^\perp$.

61.6. Подпространство L задано системой уравнений:

$$(x, e_1) = 0, \ldots, (x, e_k) = 0,$$

где $e_1, \ldots, e_k$ – некоторая ортонормированная система векторов. Используя скалярные произведения $(y, e_1), \ldots, (y, e_k)$, найти образ произвольного вектора $y \in V$ для оператора:

а) ортогонального проектирования на подпространство L;

б) ортогонального отражения относительно подпространства $L^\perp$.

61.7. В естественном базисе e пространства $\mathbb{R}^4$ найти матрицу оператора ортогонального проектирования на линейное подпространство L, если L натянуто на систему векторов:

а) $(2, 3, -1, 1)^T$; б) $(1, 2, 1, -2)^T$;

в) $(1, -1, 2, 0)^T$, $(-1, 1, 1, 3)^T$; г) $(1, 1, 1, 1)^T$, $(0, 1, 1, 0)^T$;

д) $(1, 1, -1, 0)^T$, $(0, 1, 1, -1)^T$, $(-1, 1, 0, 1)^T$;

е) $(0,1,0,1)^T$, $(1,0,3,0)^T$, $(0,1,-1,-1)^T$.

61.8. В базисе e найти матрицу оператора ортогонального отражения относительно подпространств L, заданных в задаче 61.7.

61.9. Линейное подпространство L четырехмерного евклидова пространства E в некотором ортонормированном базисе e задано системой уравнений. Найти в том же базисе матрицу оператора ортогонального проектирования на L, если:

а) $L:\ x_1+x_2+x_3+x_4=0$; б) $L:\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0,\\ 3x_2-2x_3+3x_4=0; \end{cases}$

в) $L:\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\ x_1+3x_2-4x_3+3x_4=0; \end{cases}$

г) $L:\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2-x_3-2x_4=0. \end{cases}$

61.10. В условиях задачи 61.9 найти в базисе e матрицу оператора ортогонального отражения пространства E относительно указанных подпространств L.

61.11. Пусть системы векторов $f_1,\dots,f_m$ и $g_1,\dots,g_m$ удовлетворяют условиям $(f_i,g_j)=0$, $i,j=\overline{1,m}$, $i\neq j$, и $(f_i,g_i)\neq 0$, $i=\overline{1,m}$. Пусть $L_1=\mathcal{L}(f_1,\dots,f_m)$, а подпространство L_2 задано системой уравнений $(x,g_1)=0,\dots,(x,g_m)=0$. Найти через скалярные произведения векторов y, $f_1,\dots,f_m$, $g_1,\dots,g_m$ образ произвольного вектора $y\in V$ для оператора:

а) проектирования на L_1 параллельно L_2;

б) отражения относительно L_1 параллельно L_2.

61.12. Оператор $\mathcal{A}$ задан формулой $\mathcal{A}x=\sum\limits_{i=1}^{m}(x,f_i)g_i$, где $f_1,\dots,f_m$, $g_1,\dots,g_m$ – некоторые заданные векторы. Доказать, что:

а) ядро оператора $\mathcal{A}$ представляет собой ортогональное дополнение линейной оболочки, натянутой на векторы $\sum\limits_{i=1}^{m}(g_k,g_i)f_i$, $k=\overline{1,m}$;

б) образ оператора $\mathcal{A}$ является линейной оболочкой, натянутой на векторы $\sum\limits_{i=1}^{m}(f_k,f_i)g_i$, $k=\overline{1,m}$.

61.13. Показать, что всякий линейный функционал $f(x)$ унитарного (евклидова) пространства V можно задать как скалярное произведение

$$f(x) = (x, p),$$

где p – некоторый фиксированный (для данного функционала) вектор пространства.

61.14. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что для любого $k = \overline{0, n}$, любых чисел $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$ можно указать многочлен $p_k(t) \in M_n$, что равенство

$$f^{(k)}(t_0) = \int_a^b f(t)p_k(t)\,dt$$

выполняется для всех многочленов $f(t) \in M_n$.

Сопряженный оператор

61.15. Доказать, что для оператора $\mathcal{A}$, действующего в унитарном (евклидовом) пространстве, выполнено:

а) $(\mathcal{A}^m)^* = (\mathcal{A}^*)^m$ для всякого $m \in \mathbb{N}$;

б) если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то свойство пункта а) имеет место для любого целого числа m;

в) если $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$ – произвольный многочлен, то

$$[f(\mathcal{A})]^* = \overline{f}(\mathcal{A}^*),$$

где $\overline{f}(t) = \overline{a_0} + \overline{a_1} t + \ldots + \overline{a_m} t^m$.

61.16. Доказать, что свойства, перечисленные в предыдущей задаче, выполняются и для операции сопряжения на множестве квадратных матриц A (комплексных или вещественных).

61.17. Показать, что для нильпотентного оператора $\mathcal{A}$ с индексом нильпотентности q сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ также нильпотентен и имеет тот же индекс нильпотентности.

61.18. Показать, что если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны, то перестановочны и сопряженные операторы $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{B}^*$.

61.19. Что представляет собой сопряженный оператор для:

а) тождественного оператора;

б) скалярного оператора в евклидовом (унитарном) пространстве;

в) произвольного оператора, действующего в одномерном евклидовом пространстве;

г) произвольного оператора, действующего в одномерном унитарном пространстве?

61.20. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортогональный (но не ортонормированный) базис пространства V. Найти связь между матрицами оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ и сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе. В каком случае выполнено соотношение $(\mathcal{A}^*)_e = A_e^H$?

61.21. Что можно сказать об операторе $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если в любом базисе e пространства V выполнено соотношение:

$$(\mathcal{A}^*)_e = (A_e)^H ?$$

61.22. Пусть e, g и f, h – пары биортогональных базисов в пространствах V и W соответственно. Доказать, что справедливо соотношение

$$(\mathcal{A}^*)_{gh} = (A_{fe})^H.$$

61.23. Пусть V, W – унитарные (евклидовы) пространства, $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ – ортонормированные базисы V и W соответственно и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Доказать, что имеют место равенства:

а) $\mathcal{A}^* f_j = \sum\limits_{i=1}^{n} (f_j, \mathcal{A} e_i) e_i$, $\forall j = \overline{1, m}$;

б) $\mathcal{A}^* x = \sum\limits_{i=1}^{n} \Big(\sum\limits_{j=1}^{m} (x, f_j)(f_j, \mathcal{A} e_i) \Big) e_i$, $\forall x \in W$.

61.24. Найти сопряженный оператор для оператора поворота геометрического пространства V_2 на угол α.

61.25. Найти сопряженный оператор для оператора, действующего в пространстве V_3 по правилу $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор.

61.26. Найти оператор, сопряженный линейному функционалу f, действующему в унитарном пространстве V по правилу:

а) $f(x) = (x, h)$, где $h \in V$ – заданный вектор;

б) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} (\mathcal{A}_k x, h_k)$, где $h_k \in V$, $k = \overline{1, m}$, – заданные векторы, $\mathcal{A}_k \in \mathcal{L}(V, V)$ – заданные операторы.

61.27. Оператор, действующий в n-мерном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением, задан формулой $\mathcal{A}x = Bx$, где B – заданная матрица порядка n. Найти сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$, если пространство:

а) вещественное $\mathbb{R}^n$; б) комплексное $\mathbb{C}^n$.

61.28. Найти оператор, сопряженный к оператору, действующему в евклидовом (унитарном) пространстве матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) со стандартным скалярным произведением и определенному равенством:

а) $\mathcal{F}X = AX$, где A – заданная квадратная матрица порядка m;

б) $\mathcal{G}X = XB$, где B – заданная квадратная матрица порядка n;

в) $\mathcal{C}X = [A, X]$, где $m = n$ и A – заданная квадратная матрица порядка n.

61.28.1. Оператор $\mathcal{A}$ действует из пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$ в пространство $\mathbb{R}^{n\times m}$ по правилу: $\mathcal{A}X = X^T$. Найти сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$, если известно, что в пространствах $\mathbb{R}^{m\times n}$ и $\mathbb{R}^{n\times m}$ скалярные произведения введены стандартным образом. Совпадает ли сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ с оператором $\mathcal{A}$?

61.28.2. Оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по правилу $\mathcal{A}X = AX^TB$, где A и B – заданные квадратные матрицы n-го порядка. Найти сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$, если скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n\times n}$ введено стандартным образом.

61.29. Пусть скалярное произведение в пространстве M_n задано формулой (61.1) с произвольными $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$. Для линейного оператора, действующего в M_n по правилу

$$\mathcal{A}p(t) = \int_a^b K(t,s)p(s)\,ds,$$

где $K(t,s) = \sum\limits_{j=0}^{n} t^j k_j(s)$ и $k_j(s) \in M_n$, найти сопряженный оператор.

61.30. Пространство V является прямой суммой подпространств L_1 и L_2. Доказать, что:

а) оператор, сопряженный проектированию пространства V на L_1 параллельно L_2, является оператором проектирования на $L_2^\perp$ параллельно $L_1^\perp$;

б) оператор, сопряженный отражению пространства V относительно L_1 параллельно L_2, является оператором отражения относительно $L_2^\perp$ параллельно $L_1^\perp$.

61.31. Найти оператор, сопряженный оператору $\mathcal{A}$ геометрического пространства V_2, если:

а) $\mathcal{A}$ – ортогональное проектирование на линейную оболочку

вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$;

б) $\mathcal{A}$ – ортогональное отражение относительно линейной оболочки, натянутой на вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

61.32. Пусть Oxy – прямоугольная система координат на плоскости и $\mathcal{A}$ – оператор проектирования на ось Ox параллельно биссектрисе первой и третьей четверти. Найти сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$.

61.33. Пусть $Oxyz$ – прямоугольная система координат в пространстве и $\mathcal{A}$ – оператор проектирования на координатную плоскость Oxy параллельно прямой, задаваемой уравнениями $x = y = z$. Найти сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$.

Матрица сопряженного оператора

61.34. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $f_1 = (1,0)$, $f_2 = (1,1)$ пространства $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением имеет матрицу $A_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в том же базисе f_1, f_2.

61.35. Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства в базисе из векторов $f_1 = (1,2,1)$, $f_2 = (1,1,2)$, $f_3 = (1,1,0)$ задан матрицей

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного оператор $\mathcal{A}^*$ в том же базисе f, считая, что координаты векторов даны в некотором ортонормированном базисе.

61.36. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного к оператору $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, если $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (0,0,1)$, $a_2 = (0,1,1)$, $a_3 = (1,1,1)$ в векторы $b_1 = (1,2,1)$, $b_2 = (3,1,2)$, $b_3 = (7,-1,4)$ соответственно (координаты всех векторов считаются заданными в базисе e_1, e_2, e_3).

61.37. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в евклидовом или унитарном пространстве V. Матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в V, задана в базисе $f_1, \ldots, f_n$. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$, если:

а) $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $f_1 = e_1$, $f_2 = 2e_1 + e_2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

в) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - ie_2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{bmatrix}$;

г) $f_1 = e_1+e_2+e_3$, $f_2 = e_2+e_3$, $f_3 = e_2-e_3$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

д) $f_1 = e_1-e_2-e_3$, $f_2 = e_1+e_2+e_3$, $f_3 = e_3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

е) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_3$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$;

ж) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 - e_3$,
$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

з) $f_1 = e_1$, $f_2 = ie_1+e_2$, $f_3 = -ie_1+ie_2+e_3$, $A = \begin{bmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

61.38. Скалярное произведение в евклидовом (унитарном) пространстве задано через координаты векторов в некотором базисе e. Линейный оператор имеет в базисе e матрицу A. Найти матрицу сопряженного оператора в базисе e, если:

а) $(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

б) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$, $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $(x, y) = x_1\overline{y_1}+(1+i)x_1\overline{y_2}+(1-i)x_2\overline{y_1}+3x_2\overline{y_2}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$;

г) $(x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

д) $(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 -$
$x_2y_3 - x_3y_2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

е) $(x, y) = 2x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 5x_3\overline{y_3} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + (1-i)x_2\overline{y_3}+$

$$(1+i)x_3\overline{y_2},\ A=\begin{bmatrix}1 & i & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -i\end{bmatrix}.$$

61.39. Линейный оператор двумерного евклидова пространства переводит векторы с координатными столбцами a_1 и a_2 в векторы с координатными столбцами b_1 и b_2 соответственно; базис, в котором заданы координаты, ортонормированный. Найти матрицу сопряженного оператора в этом базисе, если:

а) $a_1=(0,1)^T$, $a_2=(1,3)^T$, $b_1=(3,1)^T$, $b_2=(2,3)^T$;

б) $a_1=(1,1)^T$, $a_2=(1,4)^T$, $b_1=(0,-2)^T$, $b_2=(-3,7)^T$.

61.39.1. Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом (унитарном) пространстве V. Доказать, что матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в произвольном базисе e пространства V может быть вычислена по формуле

$$(\mathcal{A}^*)_e=(\overline{\Gamma})^{-1}\overline{\Gamma(\mathcal{A})},$$

где Γ – матрица Грама базиса e, а элементы квадратной матрицы $\Gamma(\mathcal{A})$ определяются равенствами $\{\Gamma(\mathcal{A})\}_{ij}=(\mathcal{A}e_i,e_j)$.

61.40. Оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ действует в пространстве многочленов M_2 со скалярным произведением (61.1), в котором $a=-1$, $b=1$. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$:

а) в базисе 1, t, t^2; б) в базисе 1, t, $3t^2-1$;

в) в базисе t^2-t, t^2-1, t^2+t.

61.41. В пространстве M_2 введено скалярное произведение

$$(f,g)=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1).$$

Найти матрицу оператора $\mathcal{D}^*$, сопряженного к оператору дифференцирования $\mathcal{D}$, в каждом из базисов, указанных в предыдущей задаче. Сравнить полученные матрицы с соответствующими матрицами предыдущей задачи.

61.42. Оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ действует в пространстве многочленов M_2 с естественным скалярным произведением. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$ в каждом из базисов, указанных в задаче 61.40.

61.43. Оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ действует в пространстве многочленов M_n со скалярным произведением (61.1) с произвольными $a,b\in\mathbb{R}$: $a<b$. Доказать, что сопряженный оператор действует по правилу

$$\mathcal{D}^*p(t)=-\mathcal{D}p(t)+h_1(t),$$

где $h_1(t)$ – многочлен степени не выше n, однозначно определяемый из соотношений

$$\int_a^b h_1(t)t^k\,dt = b^k p(b) - a^k p(a), \quad k = \overline{0,n}.$$

61.44. Оператор двукратного дифференцирования $\mathcal{D}^2$ действует в пространстве многочленов M_n со скалярным произведением (61.1) с произвольными $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$. Доказать, что сопряженный оператор действует по правилу

$$(\mathcal{D}^2)^* p(t) = \mathcal{D}^2 p(t) + h_2(t),$$

где $h_2(t)$ – многочлен степени не выше n, однозначно определяемый из соотношений

$$\int_a^b h_2(t)t^k\,dt = -W(t^k, p(t))\Big|_a^b, \quad k = \overline{0,n},$$

в которых $W(f,g) = \begin{vmatrix} f(t) & f'(t) \\ g(t) & g'(t) \end{vmatrix}$ – вронскиан функций $f(t)$ и $g(t)$.

61.45. Доказать, что для кронекерова произведения $A \otimes B$ сопряженная матрица имеет вид $A^H \otimes B^H$.

61.46. Показать, что в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением сопряженными для операторов $\mathcal{G}X = AXB$ и $\mathcal{F}X = AX + XB$, где A, B – заданные квадратные матрицы n-го порядка, являются операторы $\mathcal{G}^*X = A^H X B^H$ и $\mathcal{F}^*X = A^H X + XB^H$ соответственно.

61.47. Пусть A – матрица линейного оператора в базисе e евклидова пространства, A^* – матрица сопряженного оператора в том же базисе. Доказать, что $A^* = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$, где Γ – матрица Грама базиса e. Как связаны матрицы A и A^*, если оператор действует в унитарном пространстве?

61.48. Пусть A – матрица линейного оператора евклидова пространства в некотором базисе, Γ – матрица Грама этого базиса. Найти матрицу A^* сопряженного оператора в том же базисе, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Ядро и образ сопряженного оператора

61.49. Доказать *теорему Фредгольма*: для того чтобы неоднородная система линейных уравнений $Ax = b$ была совместна, необходимо и достаточно, чтобы столбец b был ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной системы $A^H y = 0$.

61.50. Доказать *альтернативу Фредгольма*: или система уравнений $Ax = b$ совместна при любой правой части b, или сопряженная однородная система $A^H y = 0$ имеет ненулевое решение.

61.51. Доказать, что для любого оператора $\mathcal{A}$ выполнены соотношения:

а) $\ker \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \ker \mathcal{A}$; б) $\operatorname{im} \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \operatorname{im} \mathcal{A}^*$.

61.52. Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таковы, что $\mathcal{B}^*\mathcal{A} = \mathcal{O}$. Доказать, что образы этих операторов суть ортогональные подпространства.

61.53. Доказать, что если $\mathcal{A}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A} = \mathcal{O}$, то ранг оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ равен сумме рангов операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. При этом ядро оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ есть пересечение ядер операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

61.54. Найти ядро и образ оператора, сопряженного к оператору дифференцирования $\mathcal{D}$, действующего в пространстве M_2 со скалярным произведением, определяемым: а) формулой из задачи 61.41; б) формулой (61.1) с $a = -1$, $b = 1$; в) стандартным образом.

Структура сопряженного оператора. Базис Шура

61.55. Оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ действует в пространстве многочленов M_n с естественным скалярным произведением. Описать все инвариантные подпространства сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$.

61.56. Оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ действует в пространстве многочленов M_n со скалярным произведением:

а) определяемым равенством

$$(p,q)=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k);$$

б) определяемым равенством (61.1) с $a=-1$, $b=1$.

В каждом из этих случаев найти n-мерное инвариантное подпространства сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$.

61.57. Найти двумерные инвариантные подпространства оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства матрицей:

а) $\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}-3&2&5\\9&0&-9\\0&3&3\end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}1&3&-3\\-3&-5&-3\\1&1&2\end{bmatrix}$.

61.58. Пусть L – подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в евклидовом (унитарном) пространстве V, $\mathcal{P}_0\in\mathcal{L}(V,L)$ – оператор ортогонального проектирования V на L. Доказать, что

$$(\mathcal{A}|L)^*\mathcal{P}_0=\mathcal{P}_0\mathcal{A}^*.$$

61.59. Оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном евклидовом (унитарном) пространстве V, имеет инвариантное подпространство L размерности $n-1$. Доказать, что подпространство $L^\perp$ натянуто на некоторый собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*$.

61.60. Оператор $\mathcal{A}$ действует в n-мерном пространстве V. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что любое его инвариантное подпространство размерности $n-1$ содержит образ оператора $\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{I}$, где λ_0 – некоторое собственное значение оператора $\mathcal{A}$.

61.61. Доказать, что линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном вещественном линейном пространстве, имеет $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство тогда и только тогда, когда спектр оператора $\mathcal{A}$ не пуст.

61.62. Построить ортонормированный базис (базис Шура), в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ трехмерного евклидова пространства будет верхней треугольной, и найти эту матрицу, если $\mathcal{A}$ задан в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

61.63. Найти все базисы Шура линейного оператора пункта д) предыдущей задачи и найти соответствующие каждому такому базису верхние треугольные матрицы оператора.

61.64. Найти базис Шура для оператора дифференцирования $\mathcal{D}$, действующего в пространстве M_2 со скалярным произведением, определяемым: а) формулой из задачи 61.41; б) формулой (61.1) с $a = -1$, $b = 1$; в) стандартным образом.

61.65. Доказать, что перестановочные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующие в унитарном пространстве, имеют общий базис Шура, в котором матрицы этих операторов треугольные одинакового вида.

61.66. Доказать, что любая квадратная комплексная (вещественная) матрица A унитарно (соответственно ортогонально) подобна квазидиагональной матрице B с треугольным клетками на главной диагонали, т.е. существует такая унитарная (ортогональная) матрица S, что $A = S^H BS$.

61.67. Оператор $\mathcal{A}$ действует в унитарном пространстве V. Найти связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ и сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.

61.68. Пусть x – общий собственный вектор операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Доказать, что соответствующие вектору x собственные значения λ и μ являются комплексно сопряженными числами.

61.69. Пусть x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ, y – собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*$, отвечающий собственному значению μ, причем $\mu \neq \overline{\lambda}$. Доказать, что векторы x и y ортогональны.

61.69.1. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – оператор простой структуры и $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Доказать, что биортогональный к e базис $f_1, \ldots, f_n$ состоит из собственных векторов сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$, причем собственные значения, соответствующие e_k и f_k, комплексно сопряжены для всех $k = \overline{1, n}$.

61.70. Пусть K_λ и K^*_μ – корневые подпространства операто-

ров $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$, отвечающие соответственно собственным значениям λ и μ, причем $\mu \neq \overline{\lambda}$. Доказать, что подпространства K_λ и K^*_μ ортогональны.

61.70.1. Доказать, что максимальная высота корневых векторов в корневых подпространствах K_λ и $K^*_{\overline{\lambda}}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$, отвечающих соответственно собственным значениям λ и $\overline{\lambda}$, одинакова.

61.70.2. Пусть в корневом подпространстве K_λ серия
$e_1 = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{q-1}e$, $e_2 = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{q-2}e, \ldots, e_{q-1} = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})e$, $e_q = e$
порождена корневым вектором e оператора $\mathcal{A}$ максимальной высоты, а в корневом подпространстве $K^*_{\overline{\lambda}}$ серия
$f_1 = (\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})^{q-1}f$, $f_2 = (\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})^{q-2}f, \ldots, f_{q-1} = (\mathcal{A}^*-\overline{\lambda}\mathcal{I})f$, $f_q = f$
порождена корневым вектором f оператора $\mathcal{A}^*$ максимальной высоты (в силу предыдущей задачи эти высоты одинаковы). Доказать, что

$$(e_k, f_j) = c, \quad \text{если } k+j = q+1,$$
$$(e_k, f_j) = 0 \quad \text{в противном случае,}$$

причем константа c отлична от нуля и не зависит от k и j.

61.71. Как связаны жордановы формы сопряженных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$?

61.72. В пространстве многочленов M_2 с естественным скалярным произведением найти канонические базисы Жордана для оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ и сопряженного к нему оператора $\mathcal{D}^*$.

61.73. Доказать, что базис Шура оператора $\mathcal{A}$ определен неоднозначно. Именно, для любого заранее заданного расположения собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ оператора $\mathcal{A}$ найдется ортонормированный базис унитарного пространства, в котором матрица этого оператора – верхняя (нижняя) треугольная, причем на главной диагонали стоят собственные значения λ_j в указанном порядке.

§62. Нормальные операторы и матрицы

Пусть V – унитарное или евклидово пространство. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется *нормальным оператором*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется

нормальной матрицей, если

$$AA^H = A^H A.$$

Из определения и теоремы 61.8 следует, что оператор нормален тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе его матрица нормальна.

Теорема 62.1. *Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\overline{\lambda}$.*

Следствие. Если $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, то

$$\ker \mathcal{A} = \operatorname{im}^{\perp} \mathcal{A}, \quad \ker \mathcal{A}^* = \operatorname{im}^{\perp} \mathcal{A}^*.$$

Теорема 62.2. *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Теорема 62.3 (критерий нормальности). *Линейный оператор, действующий в унитарном пространстве, нормален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора.*

Достаточность в теореме 62.3 справедлива и для оператора, действующего в евклидовом пространстве.

Следствие. В унитарном пространстве нормальный оператор $\mathcal{A}$ и его сопряженный $\mathcal{A}^*$ имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.

Теорема 62.4. *Если любой собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, действующего в унитарном пространстве V, является собственным вектором сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$, то $\mathcal{A}$ – нормальный оператор.*

Подобные комплексные (вещественные) матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ называются *унитарно* (соответственно *ортогонально*) *подобными*, если матрица преобразования подобия Q унитарна (соответственно ортогональна), т.е. если $Q^H Q = QQ^H = I$ (соответственно $Q^T Q = QQ^T = I$).

Из определения следует, что две комплексные (вещественные) квадратные матрицы одинакового порядка унитарно (соответственно ортогонально) подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же оператора в унитарном (соответственно евклидовом) пространстве в ортонормированных базисах.

Теорема 62.5 (матричная формулировка теоремы 62.3). *Квадратная комплексная матрица нормальна тогда и только тогда, когда она унитарно подобна диагональной матрице.*

Пример 62.1. Найти ортонормированный базис из собственных векторов оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Так как базис, в котором задана матрица оператора, ортонормированный, то нормальность оператора следует из того, что A – нормальная матрица, т.е. $A^T A = AA^T$ (последнее равенство очевидно в силу симметричности матрицы A: $A^T = A$).

Построим характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{вычтем из 1-й}\\ \text{строки 2-ю, а из}\\ \text{3-й строки 4-ю}\end{array}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{прибавим ко 2-му}\\ \text{столбцу 1-й, а к 4-му}\\ \text{столбцу 3-й}\end{array}\right\} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3(4-\lambda).$$

Отсюда следует, что собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda_1=4$ и $\lambda_2=0$ алгебраических кратностей 1 и 3 соответственно.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих $\lambda_1=4$, решим систему уравнений $(A-4I)x=0$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Этой системе удовлетворяет единственный линейно независимый вектор $f_1=(-1,-1,1,1)^T$.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих $\lambda_2=0$, требуется решить систему $Ax=0$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Этой системе удовлетворяют три линейно независимых вектора. Для того, чтобы эти векторы были взаимно ортогональными, будем находить их последовательно.

Возьмем в качестве первого решения вектор $f_2=(1,-1,1,-1)^T$, а второе решение f_3 будем искать так, чтобы оно было ортогонально вектору f_2:

$$\left\{\begin{array}{l} Ax=0, \\ (x,f_2)=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Последней системе удовлетворяет, например, вектор $f_3=(1,1,1,1)^T$.

Аналогичным образом, третье решение f_4 будем искать так, чтобы оно было ортогонально векторам f_2 и f_3:

$$\left\{\begin{array}{l} Ax=0, \\ (x,f_2)=0, \\ (x,f_3)=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Последней системе удовлетворяет единственный линейно независимый вектор $f_4=(1,-1,-1,1)^T$.

Итак, вектор f_1 образует базис собственного подпространства W_{λ_1}, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = 4$, а векторы f_2, f_3, f_4 – ортогональный базис собственного подпространства W_{λ_2}, отвечающего собственному значению $\lambda_2 = 0$. В силу теоремы 62.2 объединение этих базисов дает ортогональный базис всего пространства. После нормировки получим искомый ортонормированный базис из собственных векторов:

$$e_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \quad e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T,$$
$$e_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \quad e_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Примеры и простейшие свойства нормального оператора

62.1. Показать, что всякий скалярный оператор унитарного (евклидова) пространства является нормальным.

62.2. Показать, что если $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, то нормальными будут также операторы:

а) $\alpha\mathcal{A}$ для любого числа $\alpha \in \mathbb{C}$;

б) $\mathcal{A}^k$ при любом натуральном k;

в) $f(\mathcal{A})$ для любого многочлена $f(t)$;

г) $\mathcal{A}^{-1}$, если $\mathcal{A}$ невырожден;

д) $\mathcal{A}^*$.

62.3. Показать, что всякий линейный оператор, действующий в одномерном унитарном (евклидовом) пространстве, является нормальным оператором.

62.4. Показать, что оператор поворота на плоскости V_2 является нормальным оператором.

62.5. Показать, что оператор, действующий в пространстве V_3 по правилу $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор, является нормальным.

62.6. Показать, что в пространстве многочленов M_n с естественным скалярным произведением следующие операторы являются нормальными:

а) $f(t) \mapsto f(-t)$; б) $f(t) \mapsto f(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; в) $f(t) \mapsto t^n f(t^{-1})$.

62.7. Доказать, что всякий циркулянт[2] является нормальной матрицей.

[2] См. задачи 57.68, §57 и 58.68, §58.

62.8. Привести примеры, показывающие, что сумма $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ и произведение $\mathcal{AB}$ нормальных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в общем случае уже не будут нормальными операторами.

62.9. Привести примеры, показывающие, что в неортогональном базисе матрица нормального оператора: а) может не быть нормальной; б) может быть нормальной.

62.10. Пусть $A = B+iC$ – комплексная нормальная матрица порядка n. Доказать, что действительная матрица D порядка $2n$ вида

$$D = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}$$

также является нормальной.

62.11. Доказать, что вещественная нормальная матрица ортогонально подобна квазидиагональной матрице с диагональными клетками первого и второго порядков.

62.12. Доказать, что если строки и столбцы нормальной матрицы рассматривать как векторы арифметического пространства с естественным скалярным произведением, то:

а) длина k-й строки равна длине k-го столбца;

б) скалярное произведение k-й и j-й строк равно скалярному произведению j-го и k-го столбцов (в указанном порядке).

62.13. Доказать, что квазитреугольная нормальная матрица обязательно является квазидиагональной.

62.14. Доказать, что сумма квадратов модулей всех миноров порядка k, выбранных из строк нормальной матрицы A с номерами $j_1, \ldots, j_k$, равна аналогичной сумме для столбцов с теми же номерами.

62.15. Доказать, что кронекерово произведение нормальных матриц A и B (имеющих, быть может, разный порядок) само является нормальной матрицей.

62.16. Пусть A и B – нормальные матрицы n-го порядка. Доказать, что операторы $\mathcal{F}X = AXB$ и $\mathcal{G}X = AX + XB$ являются нормальными операторами пространства $\mathbb{C}^{n\times n}$ ($\mathbb{R}^{n\times n}$) со стандартным скалярным произведением.

Структура нормального оператора

62.17. Доказать, что если $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, то:

$$\ker \mathcal{A}^* = \ker \mathcal{A}, \quad \operatorname{im} \mathcal{A}^* = \operatorname{im} \mathcal{A}.$$

62.18. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном или евклидовом пространства V, нормален тогда и только тогда, когда для всякого вектора x справедливо равенство

$$|\mathcal{A}x| = |\mathcal{A}^*x|.$$

62.19. Доказать следующее утверждение: для того чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном пространстве, был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа λ образ и ядро оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ были ортогональны. Верно ли аналогичное утверждение в евклидовом пространстве?

62.20. Доказать, что оператор проектирования $\mathcal{P}$ на подпространство L_1 параллельно L_2 является нормальным тогда и только тогда, когда подпространства L_1 и L_2 ортогональны, т.е. когда оператор $\mathcal{P}$ является оператором *ортогонального проектирования.*

62.21. Доказать, что оператор $\mathcal{R}$ отражения относительно подпространства L_1 параллельно L_2 нормален тогда и только тогда, когда подпространства L_1 и L_2 ортогональны, т.е. когда оператор $\mathcal{R}$ является оператором *ортогонального отражения.*

62.22. Доказать, что в любом подпространстве L унитарного пространства, инвариантном относительно нормального оператора $\mathcal{A}$, существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

62.23. Показать, что собственные подпространства нормального оператора попарно ортогональны.

62.24. Пусть e – собственный вектор нормального оператора $\mathcal{A}$. Доказать, что подпространство L, состоящее из всех векторов, ортогональных e, инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

62.25. Доказать, что любая вещественная матрица ортогонально подобна квазитреугольной матрице с диагональными клетками первого и второго порядков (ср. с задачей 62.11).

Показать, что указанные ниже матрицы являются нормальными, и для каждой из них найти ортонормированный базис из собственных векторов.

62.26. $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. **62.27.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

62.28. $\begin{bmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{bmatrix}$. **62.28.1.** $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

62.29. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

унитарно подобна диагональной, и найти соответствующую матрицу преобразования подобия U.

62.30. Доказать, что две нормальные матрицы одного порядка унитарно подобны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые характеристические многочлены. Верно ли это утверждение для матриц, не являющихся нормальными?

62.31. Доказать, что две нормальные матрицы n-го порядка унитарно подобны тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$ для всех $k = \overline{1, n}$.

62.32. Доказать, что если оператор, действующий в унитарном пространстве, одновременно нормальный и нильпотентный, то он нулевой. Верно ли это утверждение для оператора, действующего в евклидовом пространстве?

62.33. Может ли нормальный оператор иметь неортогональный базис, составленный из собственных векторов?

62.34. Можно ли ввести скалярное произведение в пространстве многочленов M_n $(n \geq 1)$ так, чтобы оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ стал нормальным оператором?

62.35. В пространстве многочленов M_n $(n \geq 1)$ рассматривается оператор, действующий по формуле $\mathcal{A}f(t) = f(t + a)$, где a – некоторое заданное число. Можно ли задать скалярное произведение в M_n так, чтобы этот оператор стал нормальным?

62.36. Пусть V – произвольное линейное пространство. Доказать, что, каков бы ни был оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ простой структуры, можно задать скалярное произведение в V так, чтобы $\mathcal{A}$ был нормальным оператором.

62.37. Оператор $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением имеет в естественном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ввести скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нормальным оператором.

62.38. Для каждого из следующих операторов, действующих в пространстве M_3, выяснить, можно ли ввести в M_3 скалярное произведение так, чтобы оператор стал нормальным, и, в случае положительного ответа, построить соответствующее скалярное произведение:

а) $\mathcal{A}f(t) = f(t-1)$; б) $\mathcal{A}f(t) = f(1-t)$; в) $\mathcal{A}f(t) = f(2-t)$;
г) $\mathcal{A}f(t) = f(2t+1)$; д) $\mathcal{A}f(t) = f(1+t) + f(1-t)$;
е) $\mathcal{A}f(t) = f(1-t) + f(2-t)$.

62.39. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ является нормальным тогда и только тогда, когда сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ представляется многочленом от $\mathcal{A}$.

62.40. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, действующий в евклидовом пространстве V, причем $\mathcal{A}^2 = -\mathcal{I}$. Доказать, что $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

62.41. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $p(t) = t^2 + at + b$ – многочлен, не имеющий вещественных корней. Предположим, что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, действующий в евклидовом пространстве, причем $p(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Доказать, что $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A} - a\mathcal{I}$.

62.42. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, действующий в евклидовом пространстве V, L – двумерное инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство в V, причем $\mathcal{A}$ не имеет в L собственных векторов. Доказать, что подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$.

62.43. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, действующий в двумерном евклидовом пространстве V, причем спектр $\mathcal{A}$ пуст. Доказать, что в любом ортонормированном базисе пространства V матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

62.44. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном пространстве, является нормальным тогда и только тогда, когда для каждого инвариантного подпространства L оператора $\mathcal{A}$ его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Верно ли это утверждение в евклидовом пространстве?

62.45. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном пространстве, является нормальным тогда и только тогда, когда каждое подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$, инвариантно и относительно сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.

62.46. Пусть нормальный оператор $\mathcal{A}$ перестановочен с некоторым оператором $\mathcal{B}$. Доказать, что:

а) $\mathcal{A}^*$ перестановочен с $\mathcal{B}$; б) $\mathcal{A}$ перестановочен с $\mathcal{B}^*$.

62.47. Пусть нормальный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном унитарном пространстве, имеет n различных собственный значений. Доказать, что любой оператор $\mathcal{B}$, перестановочный с $\mathcal{A}$, нормален.

62.48. Пусть A – комплексная нормальная матрица. Доказать, что существует такая нормальная матрица B, что $B^2 = A$.

62.49. Доказать, что перестановочные нормальные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют ортонормированный базис из общих собственных векторов.

Показать, что указанные ниже матрицы A и B – нормальные и перестановочные, и построить для каждой пары ортонормированный базис из общих собственных векторов.

62.50. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

62.51. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1+5i & -2+2i & 1-i \\ -2+2i & 4+2i & -2+2i \\ 1-i & -2+2i & 1+5i \end{bmatrix}$.

62.52. Доказать, что если нормальные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны, то нормальными будут и операторы $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$.

62.53. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – нормальные операторы, причем известно, что их образы ортогональны. Доказать, что $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ – нормальный оператор.

62.54. Доказать, что если операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{AB}$ нормальны и хотя бы один из операторов $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ имеет не только простые, но и различные по модулю собственные значения, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны.

62.55. Доказать, что если операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{AB}$ нормальны и хотя бы один из операторов $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ не имеет различных собственных значений одинакового модуля, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны.

62.56. Привести пример нормальных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, для которых операторы $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ нормальны и различны.

62.57. Доказать, что комплексная матрица $A = (a_{kj}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ нормальна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k,j=1}^{n} |a_{kj}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все (с учетом алгебраических кратностей) собственные значения матрицы A.

62.58. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, действующий в n-мерном унитарном пространстве V, и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ с учетом их алгебраической кратности. Доказать, что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tr}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2.$$

62.59. Матрицы A, B и AB нормальны. Доказать, что матрица BA также нормальна.

62.60. *Спектральным радиусом* $\rho(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ называется максимальный из модулей его собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\rho(\mathcal{A}) = \max_k |\lambda_k|.$$

Обосновать следующую экстремальную характеристику спектрального радиуса нормального оператора $\mathcal{A}$:

$$\rho(\mathcal{A}) = \max_{x \neq \theta} \frac{|(\mathcal{A}x, x)|}{(x, x)}.$$

Что можно сказать о векторах, на которых достигается этот максимум?

62.61. Доказать, что имеют место следующие оценки для спектрального радиуса нормальной матрицы A n-го порядка:

$$\text{а) } \rho(A) \geq \frac{1}{n}\left|\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\right|; \qquad \text{б) } \rho(A) \geq \max_{1 \leq k \leq n} |a_{kk}|.$$

62.62. Доказать, что для спектрального радиуса нормального оператора $\mathcal{A}$ справедлива формула

$$\rho(\mathcal{A}) = \max_{x \neq \theta} \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|}.$$

Всякий ли вектор x, реализующий указанный максимум, будет собственным вектором оператора $\mathcal{A}$?

§63. Унитарные операторы и матрицы

Линейный оператор $\mathcal{U}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называется *унитарным* (соответственно *ортогональным*) оператором, если

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}.$$

Из определения вытекает, что

1) оператор $\mathcal{U}$ унитарен (ортогонален) тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет унитарную (соответственно ортогональную) матрицу;

2) для унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$

$$|\det \mathcal{U}| = 1;$$

3) для унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1};$$

4) унитарный (ортогональный) оператор нормален.

Теорема 63.1 (критерии унитарности). *В унитарном (евклидовом) пространстве V следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор $\mathcal{U}$ унитарен (ортогонален);*

2) $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$;

3) $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$;

4) *оператор $\mathcal{U}$ сохраняет скалярное произведение, т.е.*

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y), \quad \forall x, y \in V;$$

5) *оператор $\mathcal{U}$ изометричен, т.е. сохраняет длину:*

$$|\mathcal{U}x| = |x|, \quad \forall x \in V;$$

6) *оператор $\mathcal{U}$ переводит любой ортонормированный базис V в ортонормированный базис;*

7) *оператор $\mathcal{U}$ переводит хотя бы один ортонормированный базис V в ортонормированный базис.*

Следствие. Унитарный (ортогональный) оператор на любом своем инвариантном подпространстве индуцирует унитарный (соответственно ортогональный) оператор.

Теорема 63.2 (спектральная характеристика унитарного оператора). *Нормальный оператор в унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны единице.*

Теорема 63.3. *Если подпространство L инвариантно относительно унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{U}$.*

Теорема 63.4. *Для любого ортогонального оператора $\mathcal{Q}$ в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис e, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму с клетками вида*

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad [\pm 1]$$

на главной диагонали:

$$Q_e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & O & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & O & & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{matrix} \end{bmatrix}. \qquad (63.1)$$

Матрица (63.1) называется *канонической формой матрицы ортогонального оператора.*

Простым вращением называется оператор в евклидовом пространстве, который в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & O & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & O & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \end{bmatrix}.$$

Простым отражением называется оператор в евклидовом пространстве, который в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема 63.5. *Всякий ортогональный оператор может быть представлен как произведение некоторого числа простых вращений и простых отражений.*

Пример 63.1. Линейный оператор $\mathcal{A}$ унитарного (евклидова) пространства переводит векторы базиса $f_1, \ldots, f_n$ соответственно в векторы $g_1, \ldots, g_n$. Показать, что оператор $\mathcal{A}$ унитарен (ортогонален) тогда и только тогда, когда матрицы Грама систем $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ совпадают.

Решение. Пусть $x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_kf_k$ и $y=\sum\limits_{j=1}^{n}y_jf_j$ – произвольные векторы пространства. Оператор $\mathcal{A}$ – унитарен (ортогонален) тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное произведение любой пары векторов. Так как

$$(x,y)=\sum_{k,j=1}^{n}x_k\overline{y_j}(f_k,f_j),\ (\mathcal{A}x,\mathcal{A}y)=\sum_{k,j=1}^{n}x_k\overline{y_j}(\mathcal{A}f_k,\mathcal{A}f_j)=\sum_{k,j=1}^{n}x_k\overline{y_j}(g_k,g_j),$$

то унитарность (ортогональность) оператора равносильна равенству

$$\sum_{k,j=1}^{n}x_k\overline{y_j}(f_k,f_j)=\sum_{k,j=1}^{n}x_k\overline{y_j}(g_k,g_j),\ \forall x=\sum_{k=1}^{n}x_kf_k,\ y=\sum_{j=1}^{n}y_jf_j,$$

что, как легко проверить, равносильно совпадению матриц Грама

$$G(f_1,\dots,f_n)=G(g_1,\dots,g_n).\ \blacksquare$$

Пример 63.2. Оператор $\mathcal{A}$ задан в некотором базисе четырехмерного пространства V матрицей

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&1&1&1\\-2&-2&-2&-1\\-2&-2&-1&-2\end{bmatrix}.$$

Показать, что оператор $\mathcal{A}$ является оператором отражения, и ввести скалярное произведение в V так, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был ортогональным.

Решение. 1. Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ имеет простую структуру, а его спектр состоит из двух чисел: $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=1$. В этом случае пространство V разлагается в прямую сумму собственных подпространств W_{λ_1} и W_{λ_2}, отвечающих собственным значениям $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=1$ соответственно. Отсюда непосредственно следует, что оператор $\mathcal{A}$ является оператором отражения в подпространстве W_{λ_2} относительно W_{λ_1}. Действительно:

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in V:\ x=x_1+x_2,\\ \qquad x_1\in W_{\lambda_1},x_2\in W_{\lambda_2}\end{array}\right\}\ \Longrightarrow\ \mathcal{A}x=\mathcal{A}x_1+\mathcal{A}x_2=-x_1+x_2.$$

Итак, построим характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1&1\\2&1-\lambda&1&1\\-2&-2&-2-\lambda&-1\\-2&-2&-1&-2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1+\lambda&0&0\\2&1-\lambda&1&1\\0&0&-1-\lambda&1+\lambda\\-2&-2&-1&-2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\2&1-\lambda&1&1\\0&0&1&-1\\-2&-2&-1&-2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&3-\lambda&1&2\\0&0&1&0\\-2&-4&-1&-3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3(\lambda-1).$$

Таким образом, собственными значениями являются числа $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=1$ алгебраических кратностей $m_1=3$ и $m_2=1$ соответственно.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1=-1$, необходимо решить систему

$$(A+I)x=0\ \Longleftrightarrow\ [\,2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\mid 0\,].$$

Фундаментальная система решений этой системы $e_1 = (1,-1,0,0)^T$, $e_2 = (0,0,1,-1)^T$, $e_3 = (1,0,-2,0)^T$ образует базис собственного подпространства W_{λ_1}, откуда следует, что геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = -1$ равна трем и совпадает с его алгебраической кратностью m_1.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_2 = 1$, необходимо решить систему

$$(A-I)x=0 \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора $e_4 = (1,1,-1,-1)^T$ и образует базис собственного подпространства W_{λ_2}. Тем самым, геометрическая кратность собственного значения $\lambda_2 = 1$ равна единице и совпадает с его алгебраической кратностью m_2.

Согласно критерию теоремы 58.3 оператор $\mathcal{A}$ имеет простую структуру.

2. Как следует из теоремы 63.2, оператор $\mathcal{A}$ простой структуры с собственными значениями $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$ будет ортогональным, если его собственные векторы образуют ортонормированный базис.

Введем скалярное произведение так, чтобы базис e_1, e_2, e_3, e_4, построенный выше, был ортонормированным.

Пусть два произвольных вектора x и y пространства V заданы вектор-столбцами своих координат в исходном базисе:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T.$$

Разложим векторы x и y по базису e:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, \quad y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4$$

и введем скалярное произведение равенством

$$(x,y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4. \qquad (63.2)$$

Очевидно, что в этом случае система e_1, e_2, e_3, e_4 станет ортонормированной.

Чтобы найти координаты вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ в базисе e, решим систему:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & x_3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & x_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|l} -1 & 0 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|l} 2 & 0 & 0 & 0 & 2x_1 + x_3 + x_4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = x_1 + \dfrac{x_3 + x_4}{2}, \\ \alpha_2 = -x_1 - x_2 - \dfrac{x_3 + 3x_4}{2}, \\ \alpha_3 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \\ \alpha_4 = x_1 + x_2 + \dfrac{x_3 + x_4}{2}. \end{array}$$

Аналогичные соотношения (с заменой x_j на y_j) имеют место для координат вектора $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ в базисе e.

Окончательно из (63.2) получим формулу для скалярного произведения:

$$(x,y) = (x_1 + \frac{x_3+x_4}{2})(y_1 + \frac{y_3+y_4}{2}) + (x_1 + x_2 + \frac{x_3+3x_4}{2})(y_1 + y_2 + \\ + \frac{y_3+3y_4}{2}) + (x_1+x_2+x_3+x_4)(y_1+y_2+y_3+y_4) + (x_1+x_2+ \\ + \frac{x_3+x_4}{2})(y_1+y_2+\frac{y_3+y_4}{2}). \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Примеры и простейшие свойства унитарного (ортогонального) оператора

63.1. Доказать, что ортогональные (унитарные) операторы в пространстве $\mathcal{L}(V,V)$ образуют мультипликативную группу.

63.2. Образует ли подгруппу в группе всех ортогональных операторов, действующих в евклидовом пространстве:

а) подмножество операторов с определителем, равным 1;

б) подмножество операторов с определителем, равным -1?

63.3. Пусть V – евклидово (унитарное) пространство, L – некоторое его подпространство. Образует ли подгруппу в группе ортогональных (унитарных) операторов подмножество операторов, для которых L является инвариантным подпространством?

63.4. Показать, что произведение унитарного оператора на число α является унитарным оператором тогда и только тогда, когда $|\alpha| = 1$.

63.5. Описать все унитарные операторы, действующие в одномерном пространстве.

63.6. Определить, является ли ортогональным (соответственно, унитарным) оператор:

а) поворота плоскости V_2 на утол α;

б) оператор, действующий в пространстве V_3 по формуле $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор;

в) оператор, действующий в пространстве M_n со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{A}f(t) = f(-t)$;

г) оператор, действующий в пространстве M_n со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{A}f(t) = t^n f(t^{-1})$;

д) оператор из пункта "в)", если скалярное произведение в M_n задано формулой (61.1) с $a = -1$, $b = 1$;

е) оператор из пункта "г)", если скалярное произведение в M_n задано формулой (61.1) с $a = -1$, $b = 1$;

ж) оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{F}X = AX$, где A – заданная матрица порядка m;

з) оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{F}X = XB$, где B – заданная матрица порядка n.

63.7. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, действующий в трехмерном унитарном пространстве. Доказать, что если собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 этого оператора, рассматриваемые как точки комплексной плоскости, не лежат на одной прямой, то оператор $\mathcal{A}$ можно представить в виде

$$\mathcal{A} = \alpha\mathcal{I} + \rho\mathcal{U},$$

где $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ – некоторые числа.

63.8. Может ли оператор проектирования быть унитарным?

63.9. Показать, что оператор ортогонального отражения является унитарным оператором.

63.10. Показать, что операторы задачи 63.6, пунктов "в)" и "г)" являются операторами ортогонального отражения. Найти собственные подпространства каждого из них.

63.11. Доказать, что нормальный оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}^k = \mathcal{I}$ при некотором целом $k \neq 0$, является унитарным оператором.

63.12. Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова (унитарного) пространства переводит некоторый базис $f_1, \ldots, f_n$ в систему векторов $g_1 = \mathcal{A}f_1, \ldots, g_n = \mathcal{A}f_n$. Показать, что оператор $\mathcal{A}$ ортогонален (унитарен) тогда и только тогда, когда матрицы Грама систем $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ совпадают.

63.13. Определить, является ли ортогональным оператор $\mathcal{A}$ n-мерного евклидова пространства, действующий на векторы ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ по формулам:

а) $\mathcal{A}e_1 = e_1 + e_2$, $\mathcal{A}e_2 = e_2$; б) $\mathcal{A}e_1 = e_1 + e_2$, $\mathcal{A}e_2 = e_1 - e_2$;

в) $\mathcal{A}e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $\mathcal{A}e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$;

г) $\mathcal{A}e_1 = \dfrac{1}{13}(5e_1 - 12e_2)$, $\mathcal{A}e_2 = \dfrac{1}{13}(12e_1 + 5e_2)$;

д) $\mathcal{A}e_1 = \dfrac{1}{5}(3e_1 + 4e_2)$, $\mathcal{A}e_2 = \dfrac{1}{5}(4e_1 + 3e_2)$;

е) $\mathcal{A}e_1 = e_1+2e_2+2e_3$, $\mathcal{A}e_2 = 2e_1+e_2-2e_3$, $\mathcal{A}e_3 = 2e_1-2e_2+e_3$;

ж) $\mathcal{A}e_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3)$, $\mathcal{A}e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$,

$\mathcal{A}e_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-e_1 + 4e_2 + e_3)$;

з) $\mathcal{A}e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$, $\mathcal{A}e_2 = \frac{1}{2}(e_2+\sqrt{3}e_3)$, $\mathcal{A}e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1-e_3)$.

63.14. Определить, является ли унитарным оператор $\mathcal{A}$ n-мерного унитарного пространства, действующий на векторы ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ по формулам:

а) $\mathcal{A}e_1 = e_1+ie_2$, $\mathcal{A}e_2 = ie_1$; б) $\mathcal{A}e_1 = e_1+ie_2$, $\mathcal{A}e_2 = ie_1+e_2$;

в) $\mathcal{A}e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + ie_2)$, $\mathcal{A}e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(ie_1 + 2e_2)$;

г) $\mathcal{A}e_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + (1+2i)e_2)$, $\mathcal{A}e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(5e_1 - 2(1+2i)e_2)$;

д) $\mathcal{A}e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2)$, $\mathcal{A}e_2 = \frac{1}{2}(ie_1 + e_2 - i\sqrt{2}e_3)$,

$\mathcal{A}e_3 = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2 + \sqrt{2}e_3)$;

е) $\mathcal{A}e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2)$, $\mathcal{A}e_2 = \frac{1}{3}(2ie_1 + e_2 - 2ie_3)$,

$\mathcal{A}e_3 = \frac{1}{3}(e_1 - 2ie_2 + 2e_3)$.

63.15. Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства переводит систему векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе координатными столбцами $a_1, \ldots, a_n$, в систему векторов, заданных в том же базисе координатными столбцами $b_1, \ldots, b_n$ соответственно. Проверить, является ли оператор $\mathcal{A}$ ортогональным, если:

а) $a_1 = (3,4)^T$, $a_2 = (1,3)^T$, $b_1 = (5,0)^T$, $b_2 = (3,1)^T$;

б) $a_1 = (2,-1)^T$, $a_2 = (-1,1)^T$, $b_1 = (1,2)^T$, $b_2 = (1,1)^T$;

в) $a_1 = (1,2,2)^T$, $a_2 = (1,1,0)^T$, $a_3 = (0,1,-1)^T$, $b_1 = (2,2,1)^T$, $b_2 = (0,1,1)^T$, $b_3 = (-1,1,0)^T$;

г) $a_1 = (2,2,2,2)^T$, $a_2 = (2,0,2,2)^T$, $a_3 = (2,2,0,2)^T$, $a_4 = (2,2,2,0)^T$, $b_1 = (4,0,0,0)^T$, $b_2 = (3,-1,1,1)^T$, $b_3 = (3,1,-1,1)^T$, $b_4 = (3,1,1,-1)^T$.

63.16. Пусть A – матрица линейного оператора в некотором базисе, Γ – матрица Грама этого базиса. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять матрица A для того, чтобы этот оператор был:

а) ортогональным (в евклидовом пространстве);

б) унитарным (в унитарном пространстве)?

Отдельно рассмотреть случай, когда базис ортонормированный.

63.17. Пусть A – матрица линейного оператора в ортонормированном базисе n-мерного евклидова (унитарного) пространства. Показать, что каждое из следующих условий необходимо и достаточно для ортогональности (унитарности) этого оператора:

а) столбцы матрицы A, рассматриваемые как векторы $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), образуют ортонормированный базис;

б) строки матрицы A, рассматриваемые как векторы $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), образуют ортонормированный базис.

63.18. Проверить, является ли ортогональным линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; д) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

е) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

63.19. Проверить, является ли унитарным линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицей:

а) $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & -i \\ -i & 1-i \end{bmatrix}$;

г) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$.

63.20. Доказать, что если матрица $A = (a_{kj}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ унитарна, то $B = (b_{kj}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $b_{kj} = |a_{kj}|^2$, – дважды стохастиче-

ская матрица.

63.21. Доказать, что всякая матрица перестановок является ортогональной матрицей.

63.22. Доказать, что если $p(\lambda)$ – характеристический многочлен ортогональной матрицы порядка n, то $\lambda^n p(1/\lambda) = \pm p(\lambda)$.

63.23. Доказать, что каждый элемент унитарной матрицы равен по модулю своему дополнительному минору.

63.24. Доказать, что сумма квадратов модулей всех миноров порядка k, стоящих в произвольных k строках (столбцах) унитарной матрицы, равна единице.

63.25. Пусть угловой минор порядка k унитарной матрицы U по модулю равен единице. Доказать, что в таком случае U имеет квазидиагональный вид

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & O \\ O & U_{22} \end{bmatrix},$$

где U_{11} – клетка порядка k.

63.26. Пусть $U = P + iQ$ – комплексная унитарная матрица порядка n. Доказать, что действительная матрица порядка $2n$ вида

$$A = \begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix}$$

является ортогональной.

63.27. Доказать, что кронекерово произведение унитарных матриц U и V (имеющих, быть может, разный порядок) само является унитарной матрицей.

63.28. Пусть U и V – унитарные матрицы n-го порядка. Показать, что:

а) оператор $\mathcal{F}X = UXV$ является унитарным;

б) оператор $\mathcal{G}X = UX + XV$, вообще говоря, не является унитарным.

63.29. Показать, что при унитарно подобном преобразовании нормальная матрица переходит в нормальную.

63.30. Может ли матрица ортогонального (унитарного) оператора в некотором базисе быть неортогональной (неунитарной)?

63.31. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующие в евклидовом пространстве V, задан в базисе $f_1, \ldots, f_n$ матрицей A; $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в V. Определить, является ли оператор $\mathcal{A}$ ортогональным, если:

а) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2$, $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$;

б) $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $f_1 = 3e_1 + e_2$, $f_2 = 2e_1 + e_2$, $A = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$;

г) $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$, $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

д) $f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2$, $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

63.32. Доказать, что линейный оператор, сохраняющий ортогональность любых двух векторов, лишь числовым множителем отличается от некоторого унитарного оператора.

63.33. Доказать, что всякое отображение, действующее в евклидовом (унитарном) пространстве и сохраняющее в нем скалярные произведения, линейно.

Структура унитарного (ортогонального) оператора

63.34. Может ли ортогональный оператор:

а) не иметь собственных векторов;

б) обладать базисом из собственных векторов;

в) иметь по крайней мере один собственный вектор, но не иметь базиса из собственных векторов?

Привести соответствующие примеры.

63.35. Найти собственные значения и какую-нибудь максимальную ортонормированную систему собственных векторов ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$;

г) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$;

ж) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; з) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; и) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

к) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{bmatrix}$; л) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$;

м) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; н) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

63.36. Найти собственные значения и какой-либо ортонормированный базис из собственных векторов унитарного оператора, заданного в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицей:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$; д) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+i & 2i \\ -2 & 1+2i \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

ж) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; з) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{bmatrix}$;

и) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$; к) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$;

л) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

63.37. Пусть в евклидовом (унитарном) пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, причем отвечающие им собственные значения по модулю равны единице. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ является ортогональным (унитарным).

63.38. Выяснить, является ли оператор $\mathcal{A}$ оператором ор-

тогонального отражения относительно некоторого подпространства L, если в ортонормированном базисе евклидова пространства он имеет матрицу:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$;

г) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

В случае положительного ответа найти подпространство L.

63.39. В базисе $1, t, t^2$ пространства M_2 оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Показать, что $\mathcal{A}$ – оператор отражения. Ввести в M_2 скалярное произведение так, чтобы $\mathcal{A}$ был ортогональным оператором.

63.39.1. Доказать, что оператор $\mathcal{T}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{T}X = X^T$, является оператором ортогонального отражения.

63.39.2. Доказать, что если матрицы A и B ортогональны, то оператор $\mathcal{A}X = AX^TB$ из задачи 61.28.2 является ортогональным.

63.40. Пусть в некотором ортонормированном базисе матрица унитарного оператора $\mathcal{A}$ вещественна и пусть f – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий комплексному собственному значению $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Пусть $f = u + iv$, где векторы u и v имеют в том же базисе вещественные координаты. Доказать, что:

а) вектор $g = u - iv$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$;

б) векторы u и v ортогональны и, кроме того, $|u| = |v| = |f|/\sqrt{2}$, $\mathcal{A}u = \alpha u - \beta v$, $\mathcal{A}v = \beta u + \alpha v$.

63.41. 1. Пусть $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор и $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) – комплексный корень его характеристического многочлена. Доказать, что найдется пара ненулевых ортогональных векторов u, v таких, что $\mathcal{A}u = \alpha u - \beta v$, $\mathcal{A}v = \beta u + \alpha v$.

2. Доказать, что всякий ортогональный оператор обладает

одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

63.42. Ортогональный оператор $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства задан матрицей:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$;

д) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$; е) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 3 & \sqrt{6}\\ 3 & 1 & -\sqrt{6}\\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2\end{bmatrix}$;

ж) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ -\sqrt{2} & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$;

и) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$; к) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

Найти канонический базис и матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

63.43. Доказать, что унитарная матрица второго порядка с определителем, равным единице, подобна вещественной ортогональной матрице.

63.43.1. Доказать, что для любой унитарной матрицы A найдется унитарная матрица B такая, что $B^2 = A$.

63.43.2. Доказать, что для ортогональной матрицы A найдется ортогональная матрица B такая, что $B^2 = A$, тогда и только тогда, когда $\det A = 1$.

63.44. Доказать, что линейный оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию

$$(\mathcal{A}^*)^{100} = \mathcal{A}^{-1},$$

является унитарным.

63.45. Известно, что все собственные значения оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ по модулю равны единице и $|\mathcal{A}x| \leq |x|$ для всех $x \in V$.

1. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ имеет простую структуру.

2. Показать, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

3. Вывести из полученных выше свойств, что $\mathcal{A}$ – унитарный оператор.

63.46. Доказать, что любая квадратная комплексная (вещественная) матрица A может быть представлена в виде

$$A = QR, \tag{63.3}$$

где Q – унитарная (ортогональная) матрица, R – правая треугольная. Представление (63.3) называется *QR-разложением* матрицы A.

63.47. Пусть $A = Q_1R_1$ и $A = Q_2R_2$ – два QR-разложения невырожденной матрицы A. Доказать, что найдется унитарная (ортогональная) диагональная матрица U такая, что

$$Q_2 = Q_1U, \quad R_1 = UR_2.$$

63.48. Доказать, что для матрицы R из разложения (63.3) имеет место равенство $A^HA = R^HR$.

63.49. Найти условие на ненулевой вектор-столбец w, при выполнении которого матрица вида

$$H = I - 2ww^H \tag{63.4}$$

является унитарной.

63.50. Пусть w – нормированный вектор-столбец. Доказать, что соответствующая ему матрица (63.4), рассматриваемая как оператор арифметического пространства со стандартным скалярным произведением, задает в нем ортогональное отражение. Такая матрица H называется *матрицей отражения*.

63.51. Для матрицы отражения найти:

а) собственные значения и собственные векторы;

б) ее определитель.

63.52. Показать, что всякая унитарная матрица, все собственные значения которой равны 1 и -1, причем собственное значение -1 простое, может быть представлена в виде (63.4).

63.53. Показать, что матрица $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ есть матрица отражения. Найти соответствующий ей вектор w.

63.54. Показать, что вектор w можно выбрать так, чтобы порожденная им матрица отражения переводила заданный вектор x в вектор, коллинеарный единичному столбцу e_1 (предполагается, что сам вектор x не коллинеарен e_1).

63.55. Используя результат предыдущей задачи, построить алгоритм получения QR-разложения квадратной матрицы.

§64. Самосопряженные операторы и матрицы

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называется *самосопряженным*, если

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*.$$

Самосопряженный оператор в унитарном пространстве называют *эрмитовым*, а в евклидовом пространстве – *симметрическим*.

Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется *самосопряженной*, если $A = A^H$. Комплексную самосопряженную матрицу называют *эрмитовой*, а вещественную – *симметрической* или *вещественно-эрмитовой* (очевидно, для симметрической матрицы: $A = A^T$).

Из определения вытекает, что:

1) самосопряженный оператор нормален;

2) оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет самосопряженную матрицу;

3) определитель самосопряженного оператора вещественен;

4) если подпространство L инвариантно относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$;

5) самосопряженный оператор на любом своем инвариантном подпространстве индуцирует самосопряженный оператор.

Теорема 64.1 (спектральная характеристика самосопряженного оператора). *Нормальный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественны,* или, в другой формулировке, *оператор, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, самосопряжен тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет вещественную диагональную форму,* или, в матричной формулировке, *нормальная матрица (комплексная или вещественная) является самосопряженной тогда и только тогда, когда она унитарно подобна вещественной диагональной матрице.*

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называется *косоэрмитовым* (соответственно, *кососимметрическим*), если

$$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}.$$

Квадратная комплексная матрица называется *косоэрмитовой*, если $A^H = -A$. Квадратная вещественная матрица называется *кососимметрической*, если $A^T = -A$.

Из определения следует, что оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов (кососимметричен) тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе пространства косоэрмитова (соответственно, кососимметрична).

Теорема 64.2. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве эрмитов тогда и только тогда, когда оператор $i\mathcal{A}$ косоэрмитов.*

Из этой теоремы следует, что все свойства самосопряженных операторов переносятся на косоэрмитовы (кососимметрические) операторы с той лишь разницей, что в последнем случае все корни характеристического многочлена чисто мнимые.

ЗАДАЧИ

64.1. Доказать, что множество всех самосопряженных операторов, действующих в унитарном (евклидовом) пространстве, образует аддитивную группу.

64.2. Пусть V – евклидово пространство. Доказать, что в линейном пространстве $\mathcal{L}(V, V)$ множество всех симметрических (кососимметрических) операторов образует линейное подпространство. Справедливо ли это утверждение для эрмитовых (косоэрмитовых) операторов, действующих в унитарном пространстве V?

64.3. Показать, что произведение ненулевого эрмитова оператора на число α будет также эрмитовым оператором тогда и только тогда, когда число α действительно.

64.4. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве V. Проверить самосопряженность операторов:

а) $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$; б) $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$; в) $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$;

г) $i(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ (если V – унитарное пространство).

64.5. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – самосопряженные операторы, действующие в унитарном (евклидовом) пространстве V. Доказать, что:

а) $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_2\mathcal{H}_1$ – самосопряженный оператор;

б) $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ – самосопряженный оператор тогда и только тогда, когда операторы $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ перестановочны;

в) их коммутатор $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ косоэрмитов (соответственно кососимметричен).

64.6. Доказать, что проектирование унитарного (евклидова) пространства V на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2 будет самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 ортогональны.

64.7. Доказать, что отражение унитарного (евклидова) пространства V относительно подпространства L_1 параллельно подпространству L_2 будет самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 ортогональны.

64.8. Описать все эрмитовы операторы, действующие в одномерном пространстве.

64.9. Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в двумерном евклидовом пространстве, причем для некоторой пары неколлинеарных векторов x и y выполнено

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y).$$

Доказать, что $\mathcal{A}$ – симметрический оператор.

64.10. Показать, что оператор, действующий в геометрическом пространстве V_3 по правилу $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор, является кососимметрическим.

64.11. Оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, переводит векторы $f_1 = (0,1,1,1)$, $f_2 = (-1,0,1,1)$, $f_3 = (-1,-1,0,1)$, $f_4 = (-1,-1,-1,0)$ соответственно в векторы $g_1 = (3,-1,-1,-1)$, $g_2 = (1,-3,-1,-1)$, $g_3 = (-1,-3,-1,1)$, $g_4 = (-3,-1,-1,1)$. Будет ли этот оператор симметрическим?

64.12. Показать, что операторы задачи 62.6 являются симметрическими в пространстве M_n со стандартным скалярным произведением.

64.13. Показать, что оператор, унитарный и эрмитов одновременно, или равен $\pm\mathcal{I}$, или является оператором ортогонального отражения.

64.14. Доказать, что если линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, обладает любыми двумя из следующих трех свойств:

1) $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор;

2) $\mathcal{A}$ – унитарный (соответственно, ортогональный) оператор;

3) $\mathcal{A}$ – инволюция, т.е. $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$,

то он обладает и третьим свойством. Найти все классы операторов, обладающих всеми этими свойствами.

64.15. Выяснить, будет ли самосопряженным линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе следующей матрицей:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

64.16. Выяснить, будет ли самосопряженным линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе унитарного пространства следующей матрицей:

а) $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & i \\ 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1-2i \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}$.

64.17. Может ли матрица самосопряженного оператора в некотором базисе евклидова пространства быть несимметрической?

64.18. Найти ортонормированный базис e из собственных векторов и матрицу A_e в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{bmatrix}$.

64.19. Привести указанные матрицы унитарно подобным преобразованием к диагональному виду:

а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

64.20. Показать, что в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением:

а) оператор умножения на заданную эрмитову матрицу (слева или справа) является самосопряженным;

б) оператор умножения на заданную косоэрмитову матрицу (слева или справа) является косоэрмитовым;

в) оператор эрмитова сопряжения является эрмитовым.

64.21. Пусть H_1 и H_2 – эрмитовы матрицы n-го порядка. Показать, что операторы $\mathcal{F}X = H_1XH_2$ и $\mathcal{G}X = H_1X + XH_2$, действующие в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением, являются эрмитовыми.

64.21.1. Доказать, что оператор $\mathcal{G}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{G}X = A^TX + XA$, самосопряжен тогда и только тогда, когда матрица A симметрическая.

64.21.2. Доказать, что оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{A}X = AX^TA$, является самосопряженным для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

64.22. Пусть A – матрица линейного оператора в некотором базисе, Γ – матрица Грама этого базиса. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять матрица A для того, чтобы этот оператор был:

а) симметрическим (в евклидовом пространстве);

б) эрмитовым (в унитарном пространстве)?

64.23. Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства задан матрицей A в некотором базисе; Γ – матрица Грама этого базиса. Определить, является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным, если:

а) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$; г) $A=\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}2 & i\\ -i & 1\end{bmatrix}$;

д) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$;

е) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$;

ж) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$;

з) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2i & -1 & 0\\ 2 & -3i & 2\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}2 & i & 0\\ -i & 2 & -i\\ 0 & i & 1\end{bmatrix}$.

64.24. Симметричный оператор, действующий в пространстве многочленов M_2 со стандартным скалярным произведением, переводит многочлены $2+2t-t^2$ и $2-t+2t^2$ соответственно в $5-t-t^2$ и $3+3t+3t^2$. След этого оператора равен 3. Найти его матрицу в базисе 1, t, t^2.

64.25. Что можно сказать об операторе $\mathcal{A}$, если он в любом базисе имеет эрмитову матрицу?

64.26. Пусть H_1 и H_2 – комплексные эрмитовы матрицы одинакового порядка. Доказать, что след матрицы H_1H_2 есть число действительное.

64.27. Пусть эрмитова матрица H представлена в виде $H=S+iK$, где S и K – действительные матрицы. Показать, что S – симметрическая, а K – кососимметрическая матрица.

64.28. Доказать, что в условиях предыдущей задачи действительная матрица

$$\begin{bmatrix} S & -K \\ K & S \end{bmatrix}$$

является симметрической.

64.29. Доказать, что кронекерово произведение эрмитовых матриц H_1 и H_2 (имеющих, быть может, разный порядок) само является эрмитовой матрицей.

64.30. Доказать, что симметрическая матрица ортогонально подобна вещественной диагональной матрице.

64.31. Доказать, что для эрмитова оператора $\mathcal{H}$ скалярное произведение $(\mathcal{H}x, x)$ есть число действительное для любого вектора x.

64.32. Доказать, что если $\mathcal{H}$ – самосопряженный оператор и скалярное произведение $(\mathcal{H}x, x)$ равно нулю для любого вектора x, то оператор $\mathcal{H}$ нулевой.

64.33. Доказать, что если $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – самосопряженные операторы и для любого вектора x выполнено

$$(\mathcal{H}_1 x, x) = (\mathcal{H}_2 x, x),$$

то $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

64.34. Доказать, что если для любого вектора x унитарного пространства V скалярное произведение $(\mathcal{H}x, x)$ есть число действительное, то оператор $\mathcal{H}$ эрмитов.

64.35. Доказать, что если $\mathcal{A}$ – унитарный оператор и оператор $\mathcal{A} - \mathcal{I}$ обратим, то оператор $i(\mathcal{A} - \mathcal{I})^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{I})$ эрмитов.

64.36. Пусть $\mathcal{A}$ – эрмитов оператор. Доказать, что:

а) оператор $\mathcal{A} - i\mathcal{I}$ обратим;

б) оператор $\mathcal{B} = (\mathcal{A} - i\mathcal{I})^{-1}(\mathcal{A} + i\mathcal{I})$ унитарен;

в) оператор $\mathcal{B} - \mathcal{I}$ обратим;

г) имеет место равенство $\mathcal{A} = i(\mathcal{B} - \mathcal{I})^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{I})$.

64.37. Показать, что оператор $\mathcal{A}$ является косоэрмитовым тогда и только тогда, когда оператор $i\mathcal{A}$ эрмитов.

64.38. Показать, что собственные значения косоэрмитова оператора суть чисто мнимые числа.

64.39. Пусть $\mathcal{A}$ – кососимметрический оператор, действующий в евклидовом пространстве V. Доказать, что $(\mathcal{A}x, x) = 0$ для любого вектора $x \in V$.

64.40. Доказать, что если $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в унитарном пространстве V, и для всех векторов $x \in V$ выполнено равенство $(\mathcal{A}x, x) = 0$, то оператор $\mathcal{A}$ нулевой. Справедливо ли подобное утверждение в евклидовом пространстве?

64.41. Доказать, что ортогональное дополнение $L^\perp$ к подпространству L евклидова (унитарного) пространства, инвариантному относительно кососимметрического (соответственно, косоэрмитова) оператора $\mathcal{A}$, также инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

64.42. Доказать, что характеристический многочлен кососимметрической матрицы имеет только чисто мнимые корни.

64.43. Доказать, что характеристический многочлен кососимметрической матрицы четного порядка является четным многочленом.

64.44. Доказать, что кососимметрический оператор, действующий в нечетномерном пространстве, вырожден.

64.45. Доказать, что если косоэрмитов оператор $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве имеет в некотором ортонормированном базисе вещественную матрицу и собственный вектор, отвечающий собственному значению $i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, представлен в виде $x + iy$, где векторы x и y имеют вещественные координаты, то:

а) векторы x и y ортогональны;

б) векторы x и y имеют одинаковую длину;

в) выполнены соотношения: $\mathcal{A}x = -\alpha y$, $\mathcal{A}y = \alpha x$.

64.46. Доказать, что для любого кососимметрического оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет квазидиагональную форму с клетками второго порядка вида $\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$, $\beta \neq 0$, и нулевыми клетками первого порядка на главной клеточной диагонали.

64.47. Доказать, что кососимметрическая матрица ортогонально подобна вещественной квазидиагональной матрице с нулевыми клетками первого порядка и кососимметрическими клетками второго порядка на главной клеточной диагонали.

64.48. Найти характеристический многочлен вещественной матрицы, одновременно ортогональной и кососимметрической.

64.49. Доказать, что вещественная трехдиагональная матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad b_k \neq 0,\ k=\overline{1,n-1},$$

ортогонально подобна диагональной матрице с различными диагональными элементами.

64.50. Используя результат предыдущей задачи, показать, что матрица Якоби

$$A_n=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad b_i c_i > 0,\ i=\overline{1,n},$$

вещественно диагонализуема.

64.51. Доказать справедливость следующих представлений для максимального и минимального собственных значений эрмитова оператора $\mathcal{H}$:

$$\lambda_1=\max_{x\neq\theta}\frac{(\mathcal{H}x,x)}{(x,x)}, \qquad \lambda_n=\min_{x\neq\theta}\frac{(\mathcal{H}x,x)}{(x,x)}.$$

Показать, что векторы, на которых достигаются указанные экстремумы, являются собственными векторами оператора $\mathcal{H}$.

64.52. Показать, что для максимального и минимального собственных значений эрмитовой матрицы $H=(h_{kj})$ справедливы оценки:

$$\lambda_1 \geq \max_k h_{kk}, \qquad \lambda_n \leq \min_k h_{kk}.$$

64.53. Пусть максимальное собственное значение λ_1 эрмитовой матрицы $H=(h_{kj})$ совпадает с некоторым диагональным элементом h_{kk}. Доказать, что все внедиагональные элементы k-й строки и k-го столбца матрицы равны нулю.

64.54. Пусть подпространство L натянуто на собственные векторы $e_1,\dots,e_k$ эрмитова оператора $\mathcal{H}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, занумерованным в порядке невозрас-

тания. Доказать, что выполнены соотношения:

$$\lambda_1 = \max_{x\in L, x\neq\theta} \frac{(\mathcal{H}x, x)}{(x, x)}, \qquad \lambda_k = \min_{x\in L, x\neq\theta} \frac{(\mathcal{H}x, x)}{(x, x)}.$$

64.55. Пусть собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ эрмитова оператора $\mathcal{H}$, действующего в n-мерном пространстве V, занумерованы в порядке невозрастания. Доказать следующую *теорему Куранта–Фишера*: для каждого собственного значения λ_k справедливы представления:

$$\lambda_k = \max_{L_k} \min_{x\in L_k, x\neq\theta} \frac{(\mathcal{H}x, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_k = \min_{L_{n-k+1}} \max_{x\in L_{n-k+1}, x\neq\theta} \frac{(\mathcal{H}x, x)}{(x, x)}.$$

В первом равенстве максимум берется по всем k-мерным подпространствам L_k пространства V; аналогично, во втором равенстве минимум берется по всевозможным подпространствам L_{n-k+1} размерности $n-k+1$.

64.56. Пусть H_{n-1} – произвольная главная подматрица эрмитовой матрицы H порядка n. Используя теорему Куранта–Фишера, доказать, что собственные значения $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ матрицы H_{n-1}, занумерованные в порядке невозрастания, *разделяют* собственные значения матрицы H, иными словами,

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

64.57. Пусть A и B – эрмитовы матрицы порядка n и $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$, $\nu_1 \geq \ldots \geq \nu_n$ – собственные значения матриц A, B и $A+B$ соответственно. Доказать следующую *теорему Вейля*: для каждого $k = \overline{1, n}$ выполнены неравенства

$$\lambda_k + \mu_1 \geq \nu_k \geq \lambda_k + \mu_n.$$

§65. Знакоопределенные операторы и матрицы

Теорема 65.1. *Линейный оператор A в унитарном пространстве V эрмитов тогда и только тогда, когда*

$$(Ax, x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in V. \tag{65.1}$$

Условие (65.1) формально верно и в евклидовом пространстве, однако лишено смысла, так как справедливо для любого линейного оператора A.

Самосопряженный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве V называется *положительно определенным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) > 0, \quad \forall x \neq \theta,$$

неотрицательно определенным (отрицательно определенным, неположительно определенным), если $(\mathcal{A}x, x) \geq 0, \forall x \in V$ (соответственно $(\mathcal{A}x, x) < 0$, $\forall x \neq \theta$, или $(\mathcal{A}x, x) \leq 0$, $\forall x \in V$). Обозначение: $\mathcal{A} > \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \geq \mathcal{O}$, $\mathcal{A} < \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$ соответственно.

Эрмитова (симметрическая) матрица A порядка n называется *положительно определенной*, если для любого ненулевого вектора-столбца $x \in \mathbb{C}^n$ (соответственно $x \in \mathbb{R}^n$)

$$x^H A x > 0 \quad \text{(соответственно } x^T A x > 0\text{)}.$$

Аналогично определяются *отрицательно, неотрицательно* и *неположительно определенные матрицы.*

Из определения следует, что оператор положительно определен тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет положительно определенную матрицу. Аналогичное утверждение имеет место и для операторов $\mathcal{A} \geq \mathcal{O}$, $\mathcal{A} < \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$.

Теорема 65.2. *Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном или евклидовом пространстве положительно определен ($\mathcal{A} \geq \mathcal{O}$, $\mathcal{A} < \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$) тогда и только тогда, когда все его собственные значения λ положительны (соответственно, $\lambda \geq 0$, $\lambda < 0$, $\lambda \leq 0$).*

Следствие 1. *Если $\mathcal{A} > \mathcal{O}$ (или $\mathcal{A} < \mathcal{O}$), то $\mathcal{A}$ обратим.*

Следствие 2. *Определитель положительно (неотрицательно) определенного оператора положителен (соответственно неотрицателен).*

Теорема 65.3. *Оператор, обратный к положительно (отрицательно) определенному оператору, положительно (соответственно отрицательно) определен.*

Теорема 65.4. *Для любого неотрицательно (положительно) определенного оператора $\mathcal{A}$ существует, и притом единственный, неотрицательно (соответственно положительно) определенный оператор $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.*

Оператор $\mathcal{B}$ называется *квадратным корнем из оператора* $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathcal{A}^{1/2}$. Аналогично определяется квадратный корень $A^{1/2}$ из положительно (неотрицательно) определенной матрицы A.

Пример 65.1. Найти квадратный корень из матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 & -3 \\ 5 & 5 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 5 & -5 \\ -3 & -3 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 & 3 & -3 \\ 5 & 5-\lambda & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 5-\lambda & -5 \\ -3 & -3 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 5 & 5-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \\ -3 & -3 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10-\lambda & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -5 & 10-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 \\ -6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-4)(\lambda-16).$$

Итак, собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 16$.

Так как все λ_j неотрицательны, то в силу теоремы 65.2 матрица A неотрицательно определена. Поэтому для нее существует квадратный корень $A^{1/2}$ (теорема 65.4).

Для нахождения $A^{1/2}$ построим матрицу S преобразования подобия, приводящего исходную матрицу A к диагональной форме:

$$A = S\Lambda S^{-1}, \text{ где } \Lambda = \operatorname{diag}(0,0,4,16).$$

Тогда $A^{1/2} = S\Lambda^{1/2}S^{-1}$, где $\Lambda^{1/2} = \operatorname{diag}(0,0,2,4)$.

Чтобы построить матрицу S (см. пример 58.1), найдем базис из собственных векторов матрицы A. Так как матрица A симметрическая, то этот базис можно выбрать ортонормированным (теорема 64.1).

Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 0$, являются ненулевыми решениями системы

$$Ax = 0 \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Базис этого собственного подпространства образуют нормированные векторы $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^T$. Нетрудно видеть, что эти векторы ортогональны.

Собственное подпространство, отвечающее $\lambda_2 = 4$, очевидно, одномерно, и соответствующий линейно независимый собственный вектор e_3 находится из системы

$$(A-4I)x = 0 \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ -3 & -3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда $e_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,1)^T$.

Наконец, собственное подпространство, отвечающее $\lambda_3 = 16$, также одномерно и, решая систему

$$(A-16I)x = 0 \iff \left[\begin{array}{cccc|c} -11 & 5 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -11 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -11 & -5 & 0 \\ -3 & -3 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

получим $e_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)^T$.

Тем самым, матрица S преобразования подобия имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Так как векторы e_1, e_2, e_3, e_4 и, следовательно, столбцы матрицы S образуют ортонормированную систему, то S – ортогональная матрица. Поэтому $S^{-1} = S^T$.

Таким образом, получим

$$A^{1/2} = S\Lambda^{1/2}S^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} S^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Примеры и простейшие свойства знакоопределенных операторов

65.1. Может ли положительно определенный оператор $\mathcal{H}$ переводить ненулевой вектор x в вектор y, ортогональный к x?

65.2. Показать, что положительно определенный оператор не вырожден.

65.3. Пусть $\mathcal{H}$ – положительно определенный оператор евклидова пространства V. Показать, что для любого ненулевого вектора $x \in V$ его образ образует с x острый угол.

65.4. Показать, что всякий оператор ортогонального проектирования является неотрицательно определенным оператором.

65.5. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{S}$ – неотрицательно определенные операторы. Показать, что для любых неотрицательных чисел α и β оператор $\alpha\mathcal{H} + \beta\mathcal{S}$ является неотрицательно определенным.

65.6. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{S}$ – неотрицательно определенные операторы, и пусть для некоторых $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ оператор $\alpha_0\mathcal{H} + \beta_0\mathcal{S}$ положительно определен. Показать, что в таком случае положительно определены все операторы $\alpha\mathcal{H} + \beta\mathcal{S}$, где α и β – произвольные положительные числа.

65.7. Показать, что эрмитов оператор $\mathcal{H}$ является неотрицательно (положительно) определенным тогда и только тогда, когда для всякого положительного (соответственно неотрицательного) числа ε оператор $\mathcal{H} + \varepsilon\mathcal{I}$ не вырожден.

65.8. Пусть V и W – пара унитарных (или евклидовых) пространств и $\mathcal{A}$ – произвольный линейный оператор, действующий из V в W. Показать, что произведение $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ является неотрицательно определенным оператором, действующим в пространстве V, а произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ – неотрицательно определенным оператором, действующим в пространстве W. Соответственно, для лю-

бой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ матрицы A^HA и AA^H неотрицательно определены.

65.9. Доказать, что

$$\operatorname{rg}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \operatorname{rg}\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \operatorname{rg}\mathcal{A}.$$

65.10. Доказать, что операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ положительно определены тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{A}$ обратим.

65.11. Пусть $\mathcal{H}$ – неотрицательно определенный оператор и $(\mathcal{H}x, x) = 0$ для некоторого вектора x. Доказать, что:

а) x принадлежит ядру $\ker\mathcal{H}$ оператора $\mathcal{H}$;

б) сужение $\mathcal{H}|T$ оператора $\mathcal{H}$ на образ $T = \operatorname{im}\mathcal{H}$ является положительно определенным.

65.12. Что можно сказать о неотрицательно определенном операторе $\mathcal{H}$, если его след равен нулю?

65.12.1. Доказать, что оператор $\mathcal{F}X = AX$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением, положительно определен тогда и только тогда, когда матрица A положительно определена. Справедливо ли это утверждение для оператора, действующего по правилу $\mathcal{F}X = XB$?

65.12.2. Доказать, что неотрицательно определенная матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор-столбец $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, для которого выполнено равенство $A = xx^H$.

Знакоопределенные матрицы. Критерий Сильвестра

65.13. Пусть A – комплексная положительно определенная матрица. Доказать, что матрица A^T также положительно определена.

65.13.1. Доказать, что действительная часть B комплексной положительно определенной матрицы $A = B + iC$ также положительно определена.

65.14. *Главной подматрицей* квадратной матрицы называется матрица, составленная из элементов матрицы A, стоящих на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами. Доказать, что любая главная подматрица неотрицательно (положительно) определенной матрицы сама является неотрицательно (соответственно положительно) определенной.

65.15. *Главным минором* квадратной матрицы A называется

определитель соответствующей главной подматрицы. Показать, что в положительно определенной матрице все главные миноры положительны.

65.16. *Угловым минором k-го порядка* квадратной матрицы A называется главный минор, стоящий на пересечении строк и столбцов с номерами $1, 2, \ldots, k$. Доказать следующий *критерий Сильвестра* положительной определенности: для того чтобы эрмитова матрица A была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры этой матрицы были положительны.

65.17. В неотрицательно определенной матрице A угловой минор порядка k равен нулю. Доказать, что равны нулю все угловые миноры порядка выше k.

65.18. Доказать, что в отрицательно определенной матрице A все главные миноры нечетного порядка отрицательны, в то время как все главные миноры четного порядка положительны.

65.19. Сформулировать и доказать критерий Сильвестра отрицательной определенности эрмитовой матрицы A.

65.20. Доказать, что если e – какой-либо базис унитарного пространства V, то матрица Грама этого базиса положительно определена.

65.21. Доказать, что если матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($\mathbb{R}^{n\times n}$) положительно определена, то в любом n-мерном унитарном (евклидовом) пространстве V матрица A является матрицей Грама некоторого базиса в V.

Для каждой из указанных ниже трехдиагональных матриц порядка n определить, является ли эта матрица знакоопределенной, и в случае положительного ответа уточнить тип знакоопределенности.

65.22.
$$\begin{bmatrix} n-1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & n-2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n-3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

65.23. $\begin{bmatrix} n+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n-1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

65.24. $\begin{bmatrix} n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & n-1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

65.25. $\begin{bmatrix} n^2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & (n-1)^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

65.26. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

65.27. Пусть в матрице A все диагональные элементы равны единице, а все внедиагональные равны α. Доказать, что если $0 \leq \alpha < 1$, то матрица A положительно определена.

65.28. Доказать, что если в трехдиагональной матрице вида

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{bmatrix}$$

действительные числа a и b удовлетворяют условию $a \geq 2|b|$, $a > 0$, то эта матрица положительно определена.

65.29. Доказать, что если в трехдиагональной матрице вида

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

действительные числа a_k и b_k таковы, что $a_k \geq 0$, $a_{k+1}a_k \geq 4b_k^2$, $\forall k = \overline{1, n-1}$, то эта матрица положительно определена.

65.30. В неотрицательно определенной матрице $A = (a_{kj})$ для некоторого k выполнено $a_{kk} = 0$. Доказать, что $a_{kj} = a_{jk} = 0$ для всех j.

65.31. Показать, что в положительно определенной матрице максимальный по модулю элемент стоит на главной диагонали.

65.32. Доказать, что эрмитова матрица $A = (a_{kj}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ с диагональным преобладанием

$$a_{jj} > \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} |a_{kj}|, \qquad \forall j = \overline{1, n},$$

положительно определена.

65.33. Пусть $A = B + iC$ – комплексная положительно определенная матрица. Доказать, что действительная матрица

$$D = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}$$

положительно определена.

65.34. Доказать следующий *критерий Якоби* положительной определенности: самосопряженный оператор, действующий в евклидовом или унитарном пространстве положительно определен тогда и только тогда, когда все коэффициенты его характеристического многочлена отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки.

65.35. Доказать, что кронекерово произведение положительно определенных матриц A_1 и A_2 (имеющих, быть может, разный порядок) само является положительно определенной матрицей.

65.36. Пусть A и B – симметрические матрицы n-го порядка. Доказать, что оператор $\mathcal{F}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{F}X =$

AXB, положительно определен тогда и только тогда, когда матрицы A и B либо обе положительно определены, либо обе отрицательно определены.

65.36.1. Доказать, что если A и B – положительно определенные матрицы n-го порядка, то оператор $\mathcal{G}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением по правилу $\mathcal{G}X = AX + XB$, положительно определен.

65.37. Что можно сказать об операторе $\mathcal{A}$, если в базисе e он имеет унитарную матрицу A_e, а в базисе f – положительно определенную матрицу A_f?

65.38. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве V, положительно определен, то для всех векторов $x, y \in V$ имеет место неравенство

$$(x, \mathcal{A}x)(y, \mathcal{A}^{-1}y) \geq (x, y)^2.$$

Разложения положительно определенных операторов. Квадратный корень

65.39. Доказать, что для любой симметрической положительно определенной матрицы $A = (a_{ij})$ существует разложение

$$A = LL^T, \tag{65.2}$$

где L – левая треугольная матрица.

65.40. Доказать справедливость следующих рекуррентных соотношений для элементов l_{kj} матрицы L в разложении (65.2) (*метод квадратного корня* или *метод Холецкого*):

$$l_{11} = a_{11}^{1/2}, \quad l_{k1} = a_{k1}/l_{11}, \quad k > 1,$$
$$l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{jp}^2)^{1/2}, \quad j > 1,$$
$$l_{kj} = (a_{kj} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{jp}l_{kp})/l_{jj}, \quad k > j.$$

65.41. Доказать, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ положительно определена тогда и только тогда, когда $A = B^H B$ для некоторой невырожденной матрицы $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

65.42. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – положительно определенная матрица и имеют место равенства: $A = B_1^H B_1$, $A = B_2^H B_2$, в которых

$B_1, B_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Доказать, что найдется унитарная матрица U такая, что $B_2 = UB_1$.

Найти квадратные корни из следующих матриц.

65.43. $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. **65.44.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

65.45. $\begin{bmatrix} 24 & 6 & -12 \\ 6 & 33 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{bmatrix}$. **65.46.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

65.46.1. Доказать, что квадратный корень из неотрицательно определенной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ранга 1 равен αA, где $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tr} A}}$.

65.47. Доказать, что для определителя положительно определенной матрицы $H = (h_{kj})$ порядка n справедливо неравенство

$$\det H \le h_{11}h_{22}\dots h_{nn}.$$

Знак равенства здесь имеет место тогда и только тогда, когда H – диагональная матрица.

65.48. Применяя результат предыдущей задачи к матрице $H = AA^H$, где $A = (a_{kj})$ – невырожденная матрица n-го порядка, доказать следующее *неравенство Адамара*:

$$|\det A|^2 \le \prod_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2.$$

65.49. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{S}$ – эрмитовы операторы, причем $\mathcal{S}$ неотрицательно определен. Доказать, что если $\mathcal{H}$ и $\mathcal{S}$ перестановочны, то перестановочны и операторы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{S}^{1/2}$.

Разные задачи

Пара эрмитовых операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ *связана неравенством* $\mathcal{H}_1 \ge \mathcal{H}_2$ ($\mathcal{H}_1 \le \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 > \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 < \mathcal{H}_2$), если оператор $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ неотрицательно (соответственно, неположительно, положительно или отрицательно) определен.

65.50. Показать, что отношение $\ge$ на множестве эрмитовых операторов обладает следующими свойствами:

а) если $\mathcal{H} \ge \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \ge \mathcal{T}$, то $\mathcal{H} \ge \mathcal{T}$;

б) если $\mathcal{H}_1 \geq \mathcal{S}_1$, $\mathcal{H}_2 \geq \mathcal{S}_2$, то $\alpha\mathcal{H}_1 + \beta\mathcal{H}_2 \geq \alpha\mathcal{S}_1 + \beta\mathcal{S}_2$ для любых неотрицательных чисел α и β;

в) если $\mathcal{H} \geq \mathcal{S}$, то $\mathcal{A}^*\mathcal{H}\mathcal{A} \geq \mathcal{A}^*\mathcal{S}\mathcal{A}$ для любого оператора $\mathcal{A}$.

65.51. Положительно определенный оператор $\mathcal{H}$ удовлетворяет неравенству $\mathcal{H} \geq \mathcal{I}$. Доказать, что $\mathcal{H}^{-1} \leq \mathcal{I}$.

65.52. Доказать, что если два положительно определенных оператора $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ связаны неравенством $\mathcal{H}_1 \geq \mathcal{H}_2$, то для обратных операторов выполнено соотношение $\mathcal{H}_1^{-1} \leq \mathcal{H}_2^{-1}$.

65.53. Доказать, что если $\mathcal{A} > \mathcal{O}$, то $\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1} \geq 2\mathcal{I}$.

65.54. Пусть эрмитов оператор $\mathcal{H}$ положительно определен. Доказать, что существует такое число $\alpha > 0$, что $\mathcal{H} \geq \alpha\mathcal{I}$.

65.55. Пусть эрмитов оператор $\mathcal{H}$ положительно определен. Доказать, что для любого положительно определенного оператора $\mathcal{A}$ существует такое число $\alpha > 0$, что $\mathcal{H} \geq \alpha\mathcal{A}$.

65.56. Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) все собственные значения $\mathcal{A}$ лежат на отрезке $[a, b]$;

б) оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ отрицателен при $\lambda > b$ и положителен при $\lambda < a$.

65.57. Показать, что произведение $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ перестановочных неотрицательно определенных операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ также является неотрицательно определенным оператором.

65.58. Пусть $\mathcal{H}_1 \geq \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{T}$ – неотрицательно определенный оператор, перестановочный с $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Доказать, что

$$\mathcal{H}_1\mathcal{T} \geq \mathcal{H}_2\mathcal{T}.$$

65.59. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – эрмитовы операторы, причем $\mathcal{H}_2$ положительно определен. Доказать, что собственные значения оператора $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ суть действительные числа, при этом сам оператор имеет простую структуру.

65.60. Пусть в условиях предыдущей задачи оператор $\mathcal{H}_1$ неотрицательно определен. Показать, что все собственные значения оператора $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ неотрицательны.

65.61. Показать, что справедливо утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи: если операторы $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – эрмитовы, $\mathcal{H}_2$ положительно определен и все собственные значения оператора $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ неотрицательны, то $\mathcal{H}_1$ неотрицательно определен.

65.62. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – операторы, действующие в унитарном (евклидовом) пространстве V. Задача нахождения числа λ

и ненулевого вектора x, удовлетворяющих уравнению

$$\mathcal{A}x = \lambda \mathcal{B}x, \tag{65.3}$$

называется *обобщенной проблемой собственных значений*, при этом числа λ называются *собственными значениями* обобщенной проблемы, а векторы x – соответствующими *собственными векторами*.

1. Доказать, что собственные значения обобщенной проблемы являются решениями уравнения

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{B}) = 0,$$

называемого λ-*уравнением* пары операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

2. Доказать, что если оператор $\mathcal{B}$ невырожден, то обобщенная проблема собственных значений (65.3) эквивалентна стандартной проблеме собственных значений

$$\widetilde{\mathcal{A}}x = \lambda x.$$

Указать соответствующий оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$.

65.63. Доказать, что если $\mathcal{B}$ – положительно определенный оператор, то обобщенная проблема собственных значений (65.3) эквивалентна стандартной проблеме собственных значений вида

$$\widetilde{\mathcal{A}}y = \lambda y,$$

где $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2}$, $y = \mathcal{B}^{1/2}x$.

65.64. Доказать, что если в условиях предыдущей задачи $\mathcal{A}$ – положительно (неотрицательно) определенный оператор, то все собственные значения обобщенной проблемы собственных значений (65.3) положительны (неотрицательны).

65.65. Пусть A и B – эрмитовы матрицы порядка n, причем B – положительно определена. Доказать, что:

а) левая часть λ-уравнения пары матриц A и B представляет собой многочлен от λ степени n, старший коэффициент которого равен определителю матрицы $-B$;

б) λ-уравнение имеет n действительных корней, если каждый считать столько раз, какова его кратность.

65.66. Пусть в обобщенной проблеме (65.3) оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ эрмитов, а $\mathcal{B}$ – неотрицательно определен. Доказать, что в пространстве V существует базис из собственных векторов задачи (65.3) тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{B}$ невырожден. Показать, что этот базис может быть выбран ортонормированным относительно скалярного произведения $(x, y)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}x, y)$.

65.67. Пусть A – эрмитова матрица, а B – положительно определенная матрица. Пользуясь задачами 65.63 и 65.66, показать, что существует невырожденная матрица S такая, что

$$S^H B S = I, \quad S^H A S = \Lambda,$$

где Λ – некоторая диагональная действительная матрица.

65.68. Доказать, что для любых положительно определенных матриц A, B и любых положительных чисел α, β: $\alpha + \beta = 1$ выполнено неравенство

$$|\alpha A + \beta B| \geq |A|^\alpha \cdot |B|^\beta.$$

65.69. Пусть A и B – матрицы порядка $n > 1$, причем $A > O$ и $B \geq O$. Доказать, что

$$|A + B| \geq |A| + |B|,$$

причем равенство достигается лишь при $B = O$.

65.70. Положительно определенная матрица A представлена в клеточном виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^H & A_{22} \end{bmatrix},$$

где A_{11} и A_{22} – квадратные подматрицы. Доказать, что

$$\det A \leq \det A_{11} \cdot \det A_{22},$$

причем равенство достигается лишь тогда, когда $A_{12} = O$.

65.71. Положительно определенная матрица A представлена в клеточном виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^H & A_{22} \end{bmatrix},$$

причем подматрица A_{12} – квадратная. Доказать, что

$$|\det A_{12}|^2 \leq \det A_{11} \cdot \det A_{22}.$$

65.72. Матрицы A и B эрмитовы, причем $A > O$. Доказать, что

$$|\det(A + iB)| \geq \det A,$$

причем равенство достигается лишь при $B = O$.

65.73. Доказать следующее *неравенство Минковского* для определителей: если матрицы A и B порядка n положительно определены, то

$$(\det(A + B))^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}.$$

Показать, что равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $B = \alpha A$ для некоторого числа $\alpha \geq 0$.

65.74. Пусть A и B – эрмитовы матрицы n-го порядка. Известно, что матрица B неотрицательно определена и $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_n$, $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$ – собственные значения матриц A и $A+B$ соответственно. Доказать следующую *теорему о монотонности*: для $\forall k = \overline{1,n}$ выполнены неравенства

$$\mu_k \geq \lambda_k.$$

65.75. Доказать, что для любого неотрицательно определенного оператора $\mathcal{A}$ выполнено соотношение

$$\max_{x,y\in V:\,|x|=|y|=1}(\mathcal{A}x,y) = \lambda_{\max}(\mathcal{A}),$$

где $\lambda_{\max}(\mathcal{A})$ – максимальное собственное значение оператора $\mathcal{A}$.

65.76. Доказать, что для любого положительно определенного оператора $\mathcal{B}$ выполнено соотношение

$$\max_{x,y\in V:\,(\mathcal{B}x,x)=|y|=1}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathcal{B})}},$$

где $\lambda_{\min}(\mathcal{B})$ – минимальное собственное значение оператора $\mathcal{B}$.

65.77. Доказать, что для любых перестановочных положительно определенных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выполнены соотношения:

а) $\max\limits_{x,y\in V:\,(\mathcal{B}x,x)=|y|=1}(\mathcal{A}x,y) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^2)}$;

б) $\max\limits_{x,y\in V:\,(\mathcal{A}x,x)=(\mathcal{B}y,y)=1}(x,y) = 1/\sqrt{\lambda_{\min}(\mathcal{A}\mathcal{B})}$,

где $\lambda_{\max}(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^2)$ и $\lambda_{\min}(\mathcal{A}\mathcal{B})$ – соответственно максимальное и минимальное собственные значения указанных операторов.

§66. Разложения линейных операторов и матриц

Теорема 66.1. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в унитарном (евклидовом) пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде суммы*

$$\mathcal{A} = \mathcal{H} + \mathcal{K} \tag{66.1}$$

эрмитова (симметрического) оператора $\mathcal{H}$ и косоэрмитова (кососимметрического) оператора $\mathcal{K}$.

Разложение (66.1) называется *эрмитовым разложением оператора $\mathcal{A}$*.

В унитарном пространстве эрмитово разложение может быть переписано в виде $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – эрмитовы операторы.

Теорема 66.2. *Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ в унитарном (евклидовом) пространстве нормален тогда и только тогда, когда операторы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ в эрмитовом разложении* (66.1) *этого оператора перестановочны.*

Теорема 66.3. *Любой оператор A в унитарном (евклидовом) пространстве может быть представлен в виде произведения*

$$A = HU \tag{66.2}$$

неотрицательного оператора H и унитарного (ортогонального) оператора U. При этом оператор H определен однозначно, а если A обратим, то однозначно определен и оператор U.

Разложение (66.2) называется *полярным разложением оператора A.*

Теорема 66.4. *Оператор A нормален тогда и только тогда, когда в любом его полярном разложении* (66.2) *операторы H и U перестановочны.*

Пример 66.1. Найти полярное разложение матрицы $A = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Решение. Известно (см. задачу 66.46), что в полярном разложении $A = BU$ матрица B является квадратным корнем из матрицы AA^T, а матрица U переводит ортонормированный базис из собственных векторов $e_1, \dots, e_n$ матрицы A^TA в ортонормированный базис $g_1, \dots, g_n$, содержащий все векторы, коллинеарные ненулевым векторам из системы $Ae_1, \dots, Ae_n$.

Имеем $AA^T = 50\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, собственными значениями AA^T являются числа $\rho_1^2 = 0$, $\rho_2^2 = 100$, а ортонормированным базисом из отвечающих им собственных векторов AA^T – векторы $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$ соответственно. Обозначим через

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицу, столбцами которых являются векторы f_1, f_2. Тогда $AA^T = Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}Q^{-1} = Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}Q^T$, поэтому $B = (AA^T)^{1/2} = Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}Q^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$.

Аналогично, $A^TA = 2\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 49 \end{bmatrix}$, числа $\rho_1^2 = 0$, $\rho_2^2 = 100$ являются собственными значениями матрицы A^TA, а векторы $e_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(7,-1)^T$, $e_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(1,7)^T$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов A^TA. Непосредственным вычислением получим

$$Ae_1 = (0,0)^T, \qquad Ae_2 = 5\sqrt{2}(-1,1)^T.$$

Следовательно, в ортонормированный базис g_1, g_2 входит вектор $g_2 = \frac{1}{10}Ae_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$. Дополним этот вектор до ортонормированного базиса всего пространства $\mathbb{R}^2$ – получим вектор $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$. Таким образом, искомая матрица U удовлетворяет соотношениям $Ue_1 = g_1$, $Ue_2 = g_2$ или, в матричной записи, $UP = G$, где

$$P = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad G = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

– матрицы, столбцами которых являются векторы e_1, e_2 и g_1, g_2 соответственно. Тогда $U = GP^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Таким образом, $A = BU$, где $B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Замечание 1. Отметим, что в этом решении базис g_1, g_2 совпадает с базисом f_1, f_2 ($G = Q$). Однако базис g_1, g_2 может быть выбран по-другому – например, $\widetilde{g}_2 = g_2$ и $\widetilde{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)^T$. Тогда искомая матрица U удовлетворяет равенству $UP = \widetilde{G}$, где $\widetilde{G} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, и следовательно, $U = \widetilde{G}P^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Тем самым, получится другое полярное разложение $A = BU$, в котором $B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Замечание 2. Во избежание больших вычислений полезно помнить, что собственные значения матрицы A^TA лишь множителем отличаются от собственных значений матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 49 \end{bmatrix}$, а собственные векторы совпадают. ∎

ЗАДАЧИ

Эрмитово разложение

66.1. Во что переходит эрмитово разложение матрицы порядка n при $n = 1$?

66.2. Что можно сказать о линейном операторе $\mathcal{A}$, действующем в унитарном пространстве V, если $(\mathcal{A}x, x) = 0$ для всякого вектора $x \in V$?

66.3. Что можно сказать о линейных операторах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующих в унитарном пространстве V, если для всех векторов $x \in V$ выполнено равенство:

а) $(\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{B}x, x)$; б) $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{B}x)$?

66.4. Доказать, что если для линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в унитарном пространстве V, скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ есть число действительное, каков бы ни был вектор $x \in V$, то $\mathcal{A}$ – эрмитов оператор.

66.5. Показать, что в определении положительно определенного оператора, действующего в унитарном пространстве, требование, чтобы этот оператор был эрмитовым, является излишним.

66.6. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{S}$ – эрмитовы операторы. Показать, что скалярное произведение $(\mathcal{H}x, \mathcal{S}x)$ будет действительным числом для любого вектора x тогда и только тогда, когда операторы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{S}$

перестановочны.

66.7. Что можно сказать о матрице $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, если она ортогональна

а) любой эрмитовой матрице;

б) любой косоэрмитовой матрице

в смысле скалярного произведения $(A, B) = \operatorname{tr}(B^H A)$?

66.8. Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ такова, что для любой эрмитовой матрицы H ранга 1 след произведения AH есть действительное число. Доказать, что в этом случае матрица A эрмитова.

66.9. Как связаны эрмитовы разложения оператора $\mathcal{A}$ и его сопряженного $\mathcal{A}^*$?

66.10. Показать, что для нормального оператора $\mathcal{A}$, действующего в унитарном пространстве, собственные значения операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в его эрмитовом разложении $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$ совпадают соответственно с действительными и мнимыми частями собственных значений оператора $\mathcal{A}$.

66.11. Показать, что всякий ортонормированный базис из собственных векторов нормального оператора $\mathcal{A}$ является в то же время базисом из собственных векторов и для операторов $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ его эрмитового разложения $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$.

66.12. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – перестановочные нормальные операторы, и $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$, $\mathcal{B} = \mathcal{S}_1 + i\mathcal{S}_2$ – их эрмитовы разложения. Доказать, что все операторы $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ перестановочны.

66.13. Пусть $\mathcal{A}$ – оператор n-мерного унитарного пространства V с эрмитовым разложением $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$. Доказать, что множество значений скалярного произведения $(\mathcal{A}x, x)$, где $x \in V$ – произвольный нормированный вектор, заключено в прямоугольнике (α_1, β_1), (α_1, β_n), (α_n, β_1), (α_n, β_n). Здесь α_1, β_1 и α_n, β_n – соответственно наибольшие и наименьшие из собственных значений операторов $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$.

66.14. Пользуясь предыдущей задачей, доказать следующую *теорему Бендиксона*: действительные (мнимые) части собственных значений оператора $\mathcal{A}$, действующего в унитарном пространстве, заключены между наибольшим и наименьшим из собственных значений оператора $\mathcal{H}_1$ (соответственно $\mathcal{H}_2$) его эрмитова разложения $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$.

66.15. Доказать, что собственные значения оператора $\mathcal{A}$, действующего в евклидовом пространстве, заключены между наибольшим и наименьшим из собственных значений оператора $\mathcal{H}$

его эрмитова разложения $\mathcal{A} = \mathcal{H} + \mathcal{K}$.

66.16. Известно, что в эрмитовом разложении $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$ оператора $\mathcal{A}$, действующего в унитарном пространстве, оператор $\mathcal{H}_1$ положительно определен. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ невырожден.

66.17. Доказать, что в условиях предыдущей задачи выполнено неравенство

$$|\det \mathcal{A}| \geq \det \mathcal{H}_1.$$

Когда достигается равенство в этом соотношении?

66.18. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$ является ортогональной суммой подпространств симметрических и кососимметрических матриц.

66.19. Что можно сказать о линейном операторе $\mathcal{A}$, действующем в евклидовом пространстве V, если $(\mathcal{A}x, x) = 0$ для всякого вектора $x \in V$?

Сингулярное разложение

66.20. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор ранга r, действующий из n-мерного унитарного (евклидова) пространства V в m-мерное унитарное (соответственно евклидово) пространство W и $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, причем векторы $e_1, \ldots, e_r$ отвечают ненулевым собственным значениям $\rho_1^2, \ldots, \rho_r^2$ ($\rho_i > 0$, $i = \overline{1,r}$). Доказать, что:

1) векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ образуют базис $\ker \mathcal{A}$;

2) векторы $e_1, \ldots, e_r$ образуют базис $\operatorname{im} \mathcal{A}^*$;

3) векторы $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_r$ ортогональны и образуют базис $\operatorname{im} \mathcal{A}$;

4) $|\mathcal{A}e_k| = \rho_k$, $k = \overline{1,r}$;

5) каждый их векторов $\mathcal{A}e_k$, $k = \overline{1,r}$, является собственным вектором оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, отвечающим собственному значению ρ_k^2;

6) если положить $f_k = \rho_k^{-1}\mathcal{A}e_k$, то

$$\mathcal{A}^* f_k = \rho_k e_k.$$

66.21. Доказать, что ненулевые собственные значения операторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ совпадают. Арифметические значения квадратных корней из общих собственных значений операторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ называются *сингулярными числами оператора* $\mathcal{A}$. Аналогично определяются сингулярные числа прямоугольной матрицы A (комплексной или вещественной).

66.22. Зная сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$, найти сингулярные числа: а) оператора $\mathcal{A}^*$; б) оператора $\alpha\mathcal{A}$, где α – произвольное комплексное число.

66.23. Доказать, что сингулярные числа оператора не изменяются при умножении его на унитарный оператор.

66.24. Показать, что оператор $\mathcal{A}$ не вырожден тогда и только тогда, когда все его сингулярные числа отличны от нуля.

66.25. Показать, что модуль определителя оператора равен произведению его сингулярных чисел.

66.26. Предполагая, что оператор $\mathcal{A}$ невырожден, найти связь между сингулярными числами операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$.

66.27. Доказать, что сингулярные числа нормального оператора совпадают с модулями его собственных значений.

66.28. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, унитарен (соответственно ортогонален) тогда и только тогда, когда все сингулярные числа этого оператора равны единице.

66.29. В пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением найти сингулярные числа оператора дифференцирования.

66.30. Найти сингулярные числа оператора дифференцирования в пространстве многочленов M_2, если скалярное произведение задано формулой

$$(f,g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Сравнить полученный результат с результатом предыдущей задачи.

66.31. В условиях задачи 66.20 доказать, что существуют ортонормированные системы $e_1,\dots,e_n \in V$ и $f_1,\dots,f_m \in W$ такие, что

$$\mathcal{A}e_k = \begin{cases} \rho_k f_k, & k \le r \\ \theta, & k > r; \end{cases} \qquad \mathcal{A}^* f_k = \begin{cases} \rho_k e_k, & k \le r \\ \theta, & k > r. \end{cases}$$

Подобные ортонормированные системы $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_m$ называются *сингулярными базисами оператора* $\mathcal{A}$.

66.32. Доказать, что если $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_m$ – сингулярные базисы оператора $\mathcal{A}$, то (в обозначениях задачи 66.20):

1) $e_1,\dots,e_n$ – ортонормированный базис пространства V из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$;

2) $f_1, \ldots, f_m$ – ортонормированный базис пространства W из собственных векторов оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

66.33. Пусть A – матрица размера $m \times n$ ранга r, вещественная или комплексная. Доказать, что матрицу A можно представить в виде

$$A = U\Lambda V,$$

где U и V – ортогональные (унитарные) матрицы соответственно порядков m и n, Λ – матрица размера $m \times n$ такая, что $\lambda_{11} \geq \lambda_{22} \geq \ldots \geq \lambda_{rr} > 0$, а все остальные элементы равны нулю. Такое представление называется *сингулярным разложением матрицы* A.

66.34. Доказать, что если $A = U\Lambda V$ – сингулярное разложение матрицы A, то:

1) диагональные элементы матрицы Λ являются сингулярными числами матрицы A;

2) столбцы матрицы U образуют ортонормированный базис из собственных векторов матрицы AA^H;

3) столбцы матрицы V^H образуют ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A^HA;

4) столбцы матриц V^H и U образуют сингулярные базисы матрицы A.

66.35. Зная сингулярное разложение $A = U\Lambda V$ матрицы A, найти сингулярные разложения и сингулярные числа матрицы: а) A^T; б) A^H; в) A^{-1}, если A обратима.

66.35.1. Определим для матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ квадратную матрицу B порядка $m+n$ вида

$$B = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A^H \end{bmatrix}.$$

Показать, что если $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q$, где $q = \min(m, n)$, – сингулярные числа матрицы A, то сингулярными числами матрицы B будут следующие $m+n$ чисел: $\rho_1, \rho_1, \rho_2, \rho_2, \ldots, \rho_q, \rho_q$ и $|m-n|$ нулей.

66.36. Определим для матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ квадратную матрицу B порядка $m+n$ вида

$$B = \begin{bmatrix} O & A \\ A^H & O \end{bmatrix}.$$

Показать, что если $\rho_1, \ldots, \rho_q$, где $q = \min(m, n)$, – сингулярные числа матрицы A, то собственными значениями матрицы B яв-

ляются числа $\pm\rho_1, \ldots, \pm\rho_q$ и $|m-n|$ нулей.

66.37. Доказать, что каковы бы ни были квадратные матрицы A и B порядка n, сингулярные числа матриц AB и $B^H A^H$ всегда одинаковы. Верно ли это утверждение для пары матриц AB и BA?

66.38. Строки матрицы A ортогональны. Доказать, что сингулярные числа матрицы A равны длинам ее строк как векторов соответствующего арифметического пространства.

66.39. Найти сингулярные числа $m \times n$-матрицы A, имеющей ранг 1.

66.39.1. Зная сингулярные разложения $A_1 = U_1\Lambda_1 V_1$ и $A_2 = U_2\Lambda_2 V_2$ матриц A_1 и A_2, найти сингулярное разложение их кронекерова произведения $A_1 \otimes A_2$.

66.40. Пусть сингулярные числа $\rho_1, \ldots, \rho_n$ оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном унитарном пространстве V, занумерованы в порядке невозрастания. Доказать, что справедлив следующий вариант теоремы Куранта–Фишера:

$$\rho_k = \max_{L_k} \min_{x \in L_k, x \neq \theta} \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|}, \quad \rho_k = \min_{L_{n-k+1}} \max_{x \in L_{n-k+1}, x \neq \theta} \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|},$$

где, как и в задаче 64.55, в первом равенстве максимум берется по всем k-мерным подпространствам L_k пространства V, а во втором равенстве минимум берется по всевозможным подпространствам L_{n-k+1} размерности $n-k+1$. В частности, верны соотношения:

$$\rho_1 = \max_{x \neq \theta} \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|}, \qquad \rho_n = \min_{x \neq \theta} \frac{|\mathcal{A}x|}{|x|}.$$

66.41. Доказать, что в условиях предыдущей задачи минимальное и максимальное по модулю собственные значения λ_n и λ_1 оператора $\mathcal{A}$ удовлетворяют неравенствам:

$$|\lambda_n| \geq \rho_n, \qquad |\lambda_1| \leq \rho_1.$$

66.42. Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в n-мерном унитарном пространстве V и α_k, β_k, γ_k, $k = \overline{1,n}$, – занумерованные в порядке невозрастания сингулярные числа операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ соответственно. Доказать, что выполнены неравенства:

$$-\alpha_1 + \beta_k \leq \gamma_k \leq \alpha_1 + \beta_k, \ \alpha_k - \beta_1 \leq \gamma_k \leq \alpha_k + \beta_1, \ k = \overline{1,n}.$$

66.43. Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в n-мерном унитарном пространстве V и α_k, β_k, δ_k, $k = \overline{1,n}$, – занумерованные в порядке невозрастания сингулярные числа операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{AB}$ соответственно. Доказать, что выполнены неравенства:

$$\alpha_n\beta_k \le \delta_k \le \alpha_1\beta_k, \quad \alpha_k\beta_n \le \delta_k \le \alpha_k\beta_1, \quad k = \overline{1,n}.$$

66.44. Доказать, что для суммы сингулярных чисел $\rho_1, \ldots, \rho_n$ матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ справедливы представления:

$$\rho_1 + \ldots + \rho_n = \max_W |\operatorname{tr}(AW)| = \max_W \operatorname{Re}\operatorname{tr}(AW),$$

где максимум берется по всем унитарным матрицам W порядка n.

Полярное разложение

66.45. Во что переходит полярное разложение матрицы порядка n при $n = 1$?

66.46. Показать, что в полярном разложении $\mathcal{A} = \mathcal{HU}$ оператора $\mathcal{A}$ неотрицательно определенный оператор $\mathcal{H}$ определен единственным образом.

66.47. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{HU}$ – произвольное полярное разложение оператора $\mathcal{A}$. Показать, что оператор $\mathcal{U}$ переводит ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ в подобный же базис оператора $\mathcal{AA}^*$.

66.48. Доказать, что для вещественной матрицы существует вещественное полярное разложение.

66.49. Показать, что, каково бы ни было полярное разложение $\mathcal{A} = \mathcal{HU}$ оператора $\mathcal{A}$, унитарный оператор $\mathcal{U}$ переводит подпространство $\operatorname{im}\mathcal{A}^*$ в подпространство $\operatorname{im}\mathcal{A}$, подпространство $\ker\mathcal{A}$ в подпространство $\ker\mathcal{A}^*$.

66.50. Найти полярное разложение отрицательно определенного оператора.

66.51. Найти полярное разложение оператора дифференцирования в пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением.

Найти полярные разложения следующих матриц.

66.52. $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$. **66.53.** $\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 26 & 7 \end{bmatrix}$. **66.54.** $\begin{bmatrix} 23 & -14 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$.

66.54.1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **66.55.** $\begin{bmatrix} 15 & 3 & -4 \\ 5 & 9 & -12 \\ 0 & 8 & 6 \end{bmatrix}$.

66.56. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & -10 \end{bmatrix}$. **66.57.** $\begin{bmatrix} 10 & -3 & -4 \\ -5 & 6 & 8 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

66.58. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -5i & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **66.59.** $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.

66.60. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. **66.60.1.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

66.60.2. Для матрицы из задачи 66.54.1 построить два различных полярных разложения.

66.61. Найти полярное разложение диагональной матрицы $A = \operatorname{diag}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где z_k, $k = \overline{1,n}$, – заданные комплексные числа.

66.61.1. Найти полярное разложение матрицы $A = xy^H$, где $x, y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ – ненулевые заданные вектор-столбцы.

66.62. Показать, что произвольную матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ можно представить в виде $A = VB$, где $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарная матрица, а матрица $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ неотрицательно определена.

66.63. Доказать, что в разложениях квадратной матрицы A: $A = B_1U$ и $A = VB_2$, в которых матрицы B_1 и B_2 неотрицательно определены, а матрицы U и V унитарны, матрицы B_1 и B_2 совпадают тогда и только тогда, когда A – нормальная матрица.

66.64. Пользуясь полярным разложением, показать, что для любой квадратной матрицы A матрицы AA^H и A^HA всегда унитарно подобны.

66.65. Используя полярное разложение, доказать утверждение, обратное утверждению задачи 65.59: если квадратная матрица A порядка n имеет простую структуру и ее собственные значения суть действительные числа, то A можно представить в виде $A = BS$, где B – эрмитова матрица, а матрица S положительно определена. Для действительной матрицы A сомножители B и S также можно выбрать действительными.

66.66. Используя полярное разложение, доказать, что мат-

рица A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда существует положительно определенная матрица P, для которой $P^{-1}AP$ – нормальная матрица.

66.67. Установить взаимосвязь между полярным и сингулярным разложениями квадратной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

а) если $A = BW$ – полярное разложение матрицы A, то ее сингулярными числами являются собственные значения $\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_n$ матрицы B, а ее сингулярное разложение имеет вид $A = U\Lambda V$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\rho_1, \ldots \rho_n)$, $B = U\Lambda U^H$, $V = U^H W$;

б) если $A = U\Lambda V$ – сингулярное разложение матрицы A, то ее полярное разложение имеет вид $A = BW$, где $B = U\Lambda U^H$, $W = UV$.

Глава XVII. Билинейные и квадратичные формы

§67. Билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве

Пусть V – линейное пространство над полем[1] P. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$ называется *билинейной формой* в пространстве V, если для любых $x, y, z \in V$, $\alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x+y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$;
3) $\mathcal{A}(x, y+z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$;
4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

Билинейная форма называется *симметричной*, если $\mathcal{A}(y, x) = \mathcal{A}(x, y)$, $\forall x, y \in V$.

Скалярное произведение (x, y) в евклидовом пространстве является симметричной билинейной формой.

Теорема 67.1. *Пусть V – линейное пространство над полем P и $e_1, \ldots, e_n$ – базис V. Для любых чисел $a_{ij} \in P$, $i, j = \overline{1, n}$, существует, и притом единственная, билинейная форма $\mathcal{A}(x, y)$ в пространстве V, для которой $\mathcal{A}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, при этом*

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \tag{67.1}$$

для всех векторов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

Представление билинейной формы в виде (67.1) называется *общим видом билинейной формы в базисе e*. Матрица $A_e = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$, элементы которой определены равенством $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, называется *матрицей билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ в базисе e*.

Общий вид (67.1) билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ может быть записан в компактной форме: если x_e и y_e – координатные столбцы векторов x и y в базисе e, то

$$\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e y_e, \qquad \mathcal{A}(x, y) = y_e^T A_e^T x_e.$$

Выражение, стоящее в правой части (67.1), также называется *билинейной формой от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$*.

Теорема 67.2. *Произвольная матрица $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ является матрицей единственной билинейной формы в заданном базисе пространства.*

---

[1] В этой главе предполагается, что характеристика основного поля равна нулю.

Теорема 67.3. *Матрицы билинейной формы $\mathcal{A}(x,y)$ в базисах e и $f=eQ$ связаны соотношением $A_f=Q^TA_eQ$.*

Следствие. $\operatorname{rg}A_e=\operatorname{rg}A_f$.

Теорема 67.4. *Билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда ее матрица в любом базисе симметрична.*

Рангом билинейной формы называется ранг ее матрицы в любом базисе. Билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ называется *вырожденной*, если $\operatorname{rg}\mathcal{A}(x,y)<\dim V$, и *невырожденной*, если $\operatorname{rg}\mathcal{A}(x,y)=\dim V$.

Теорема 67.5. *Билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ вырождена тогда и только тогда, когда существует вектор $x\neq\theta$ такой, что*

$$\mathcal{A}(x,y)=0,\quad \forall y\in V.$$

Пусть $\mathcal{A}(x,y)$ – симметричная билинейная форма в пространстве V над полем P. *Квадратичной формой* называется отображение $\mathcal{A}:V\to P$, которое каждому вектору $x\in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x,x)$. Обозначение: $\mathcal{A}(x,x)$ или $\mathcal{A}(x)$. Билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ при этом называется *полярной билинейной формой* к квадратичной форме $\mathcal{A}(x,x)$.

Теорема 67.6. *Полярная билинейная форма для любой квадратичной формы определена однозначно.*

Матрицей квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в базисе e называется матрица полярной к ней билинейной формы $\mathcal{A}(x,y)$ в этом базисе.

Две квадратные матрицы A и B порядка n называются *конгруэнтными*, если существует невырожденная матрица Q такая, что $B=Q^TAQ$.

Из свойств билинейной формы вытекают следующие свойства квадратичных форм.

1°. Матрица квадратичной формы симметрична.

2°. Любая симметрическая матрица является матрицей единственной квадратичной формы в заданном базисе.

3°. Матрицы квадратичной формы в базисах e и $f=eQ$ связаны соотношением

$$A_f=Q^TA_eQ, \tag{67.2}$$

иными словами, две матрицы квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в различных базисах конгруэнтны.

4°. В базисе e квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ с матрицей $A_e=(a_{ij})$ может быть записана в следующем виде: $\forall x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$

$$\mathcal{A}(x,x)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j,\quad a_{ij}=a_{ji}, \tag{67.3}$$

или, в компактной форме,

$$\mathcal{A}(x,x)=x_e^TA_ex_e,\quad A_e^T=A_e. \tag{67.4}$$

Представление квадратичной формы в виде (67.3) или (67.4) называется *общим видом квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в базисе e*. Выражение $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$, где $a_{ij}=a_{ji}\ \forall i,j$, называется *квадратичной формой от переменных $x_1,\dots,x_n$*.

5°. *Рангом квадратичной формы* называется ранг ее матрицы в произвольном базисе. Очевидно, $\operatorname{rg}\mathcal{A}(x,x)=\operatorname{rg}\mathcal{A}(x,y)$. Квадратичная форма

$\mathcal{A}(x,x)$ называется *вырожденной*, если $\operatorname{rg}\mathcal{A}(x,x) < \dim V$, и *невырожденной*, если $\operatorname{rg}\mathcal{A}(x,x) = \dim V$.

Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ называется *каноническим базисом квадратичной формы* $\mathcal{A}(x,x)$, если матрица квадратичной формы в этом базисе диагональна: $A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

В каноническом базисе квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ согласно (67.3) имеет вид $\mathcal{A}(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, который называется *каноническим видом* квадратичной формы, при этом числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называются ее *каноническими коэффициентами*. Канонический вид называют также *суммой квадратов*. Очевидно, что число ненулевых квадратов совпадает с рангом $\mathcal{A}(x,x)$. Итак, если e – канонический базис и $r = \operatorname{rg}\mathcal{A}(x,x)$, то

$$\mathcal{A}(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2, \quad \forall x = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Если $e_1, \ldots, e_n$ – канонический базис квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$, то полярная к ней билинейная форма в этом базисе имеет вид

$$\mathcal{A}(x,y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \ldots + \lambda_n x_n y_n, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,\ y = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

называемый *каноническим видом билинейной формы*.

Теорема 67.7. *Для любой квадратичной формы существует канонический базис,* или в другой формулировке, *любая квадратичная форма* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *от переменных* $x_1, \ldots, x_n$ *невырожденным преобразованием координат приводится к сумме квадратов.*

Две квадратичные формы f и g от n переменных называются *эквивалентными*, если одна из них приводится к другой невырожденным преобразованием координат. Очевидно, канонический вид квадратичной формы f – это эквивалентная с f форма, не содержащая произведений различных переменных $x_i x_j$, $i \neq j$.

Теорема 67.8. *Если в матрице квадратичной формы* $\mathcal{A}(x,x)$ *ранга* r *первые* r *угловых миноров отличны от нуля:* $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, *то существует базис* e, *в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид* $A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$, *где*

$$\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}, \qquad k = \overline{1,r}, \tag{67.5}$$

где Δ_k *– угловые миноры* k*-го порядка матрицы* A, *т.е.* $\Delta_k = M^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}$, $k = \overline{1,n}$, *и* $\Delta_0 = 1$.

Соотношения (67.5) называются *формулами Якоби*.

Пример 67.1. Квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ в некотором базисе e_1, e_2 имеет вид

$$\mathcal{A}(x,x) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2, \quad \forall x = x_1e_1 + x_2e_2.$$

Написать матрицу квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в этом базисе.

Решение. Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица квадратичной формы $\mathcal{A}(x,x)$ в базисе e_1, e_2. Из (67.4) следует, что если $x = x_1e_1 + x_2e_2$, то

$$\mathcal{A}(x,x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

или

$$\mathcal{A}(x,x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Пример 67.2. Восстановить билинейную форму $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$, полярную к квадратичной форме

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2.$$

Решение. Квадратичная форма $g(x_1, x_2)$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix},$$

которая совпадает с матрицей полярной к ней билинейной формы. Согласно (67.1)

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2. \quad \blacksquare$$

Пример 67.3. Привести квадратичную форму

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$$

к каноническому виду и построить невырожденное преобразование координат, осуществляющее такое приведение.

Решение. Опишем два способа, позволяющие привести квадратичную форму к каноническому виду.

Метод Лагранжа (*метод выделения полных квадратов*) состоит в последовательном выделении полных квадратов сначала в группе слагаемых, содержащих x_1, затем содержащих x_2 и т.д. Имеем

$$\begin{aligned} f &= (2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3) + 9x_2^2 + 19x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 8x_2^2 - 2x_3^2 - \\ &- 8x_2x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2^2 - 8x_2x_3) + 17x_3^2 = \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 4x_3)^2 - 16x_3^2 + 17x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + \\ &+ (x_2 - 4x_3)^2 + x_3^2 = 2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \end{aligned}$$

где $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 - 4x_3$, $y_3 = x_3$.

Если Q – матрица перехода к новому базису, то $x_e = Qy_e$. Поэтому

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 9y_3, \\ x_2 = y_2 + 4y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Заметим, что стандартный метод Лагранжа соответствует треугольному преобразованию координат (см. ниже пример 67.4).

Метод элементарных преобразований. Заметим, что если Q – матрица элементарных преобразований (§3), то преобразование (67.2) матрицы A квадратичной формы равносильно двум преобразованиям – элементарному преобразованию столбцов матрицы A, определяемому матрицей Q, и такому же преобразованию строк матрицы A. Матрицы элементарных преобразований невырождены. Следовательно, их произведение – тоже невырожденная матрица. Поэтому матрица, получающаяся в результате умножения матриц

элементарных преобразований, проводимых над столбцами и строками матрицы A квадратичной формы, является матрицей перехода к новому базису. Соответственно, квадратичная форма в результате этих преобразований может быть приведена к каноническому виду.

Отметим также, что матрицы элементарных преобразований столбцов второго типа являются диагональными матрицами, а если элементарное преобразование заключается в прибавлении к столбцу другого столбца с меньшим номером, то соответствующая матрица является верхней треугольной. Если можно обойтись только такими элементарными преобразованиями, то матрица Q перехода к новому базису, будучи произведением верхних треугольных матриц, также получится верхней треугольной.

Итак, построим последовательность элементарных преобразований столбцов и таких же преобразований строк, которые приводят матрицу A к диагональному виду. Имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 19 \end{bmatrix},$$

причем угловые миноры равны соответственно: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2$, $\Delta_3 = |A| = 2$.

1. Вычитая из 2-го столбца удвоенный 1-й столбец, а затем вычитая из 2-й строки удвоенную 1-ю строку, получим

$$A_1 = L_1^T A L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 19 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в результате такого преобразования главные миноры матрицы A_1 остались теми же: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $\Delta_3 = |A_1| = 2$.

2. Вычитая из 3-го столбца 1-й столбец, а затем вычитая из 3-й строки 1-ю строку, получим

$$A_2 = L_2^T A_1 L_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 17 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Главные миноры опять остаются без изменения: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $\Delta_3 = |A_2| = 2$.

3. Наконец, прибавив к 3-му столбцу 2-й столбец, умноженный на 4, а затем прибавив к 3-й строке 2-ю строку, умноженную на 4, получим

$$A_3 = L_3^T A_2 L_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица A_3 – диагональная, т.е. квадратичная форма f приведена к каноническому виду

$$f = 2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2. \tag{67.6}$$

В результате последнего преобразования главные миноры опять не изменились, и теперь в матрице A_3:

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 2 \cdot 1, \quad \Delta_3 = 2 \cdot 1 \cdot 1.$$

Иными словами, канонические коэффициенты могут быть вычислены по формулам:

$$2 = \Delta_1, \quad 1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad 1 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2},$$

т.е. по формулам Якоби (67.5).

Чтобы найти преобразование координат, отметим, что

$$A_3 = L_3^T L_2^T L_1^T A L_1 L_2 L_3 = (L_1 L_2 L_3)^T A (L_1 L_2 L_3),$$

так что матрица Q перехода к новому базису имеет вид

$$Q = L_1 L_2 L_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а старые координаты связаны с новыми, соответственно, по формулам

$$x_1 = z_1 - 2z_2 - 9z_3, \; x_2 = z_2 + 4z_3, \; x_3 = z_3. \quad \blacksquare$$

Пример 67.4. Привести квадратичную форму

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

к каноническому виду и найти приводящее к нему преобразование координат.

Решение. Матрица квадратичной формы f имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ее угловой минор $\Delta_1 = 0$, поэтому здесь не применимы ни стандартный метод Лагранжа, ни метод элементарных преобразований в том виде, в котором он был использован в предыдущей задаче.

Модифицируем сначала *метод Лагранжа.*

Перейдем к новым координатам

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_3 = y_3,$$

тогда квадратичная форма f перейдет в квадратичную форму

$$g = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = \{\text{выделим полный квадрат}\} = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

В координатах

$$z_1 = y_1 + y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3$$

квадратичная форма f будет иметь канонический вид

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Он соответствует преобразованию координат

$$x_1 = z_1 - z_2 - z_3, \quad x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \quad x_3 = z_3,$$

которое уже не будет треугольным.

Покажем теперь, какие изменения нужно внести в *метод элементарных преобразований.*

Отметим, что аннулировать все внедиагональные элементы матрицы A квадратичной формы элементарными преобразованиями столбцов и такими же преобразованиями строк не удастся, так как главная диагональ матрицы A нулевая. Поэтому сначала выполним предварительное преобразование.

Прибавим к 1-му столбцу 2-й, а затем прибавим к 1-й строке 2-ю строку. Имеем:

$$A_1 = L_1^T A L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь уже $\Delta_1 = 1 \neq 0$ и можно преобразованиями, аналогичными проведенным в предыдущей задаче, обнулить внедиагональные элементы 1-го столбца и 1-й строки матрицы A_1.

Вычитая из 2-го столбца 1-й столбец, умноженный на $1/2$, а затем вычитая из 2-й строки 1-ю строку, умноженную на $1/2$, получим

$$A_2 = L_2^T A_1 L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычитая из 3-го столбца 1-й столбец, а затем вычитая из 3-й строки 1-ю строку, получим

$$A_3 = L_3^T A_2 L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица A_3 – диагональная, следовательно, квадратичная форма f приведена к каноническому виду

$$z_1^2 - \frac{1}{4} z_2^2 - z_3^2.$$

Матрица Q перехода является произведением матриц используемых элементарных преобразований:

$$Q = L_1 L_2 L_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Соответствующее преобразование координат осуществляется по формулам

$$x_1 = z_1 - \frac{1}{2} z_2 - z_3, \quad x_2 = z_1 + \frac{1}{2} z_2 - z_3, \quad x_3 = z_3.$$

Отметим также, что это преобразование, как и в модифицированном методе Лагранжа, не будет треугольным. ▪

Пример 67.5. Привести квадратичную форму

$$f = 4x_1^2 - 12ix_1x_2 - 10x_2^2$$

к каноническому виду и найти приводящее к нему преобразование координат.

Решение. Применим метод Лагранжа:

$$f = (2x_1 - 3ix_2)^2 + 9x_2^2 - 10x_2^2 = (2x_1 - 3ix_2)^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2,$$

где $y_1 = 2x_1 - 3ix_2$, $y_2 = x_2$. Таким образом, каноническим видом будет форма $y_1^2 - y_2^2$, а формулы преобразования координат имеют вид

$$x_1 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{3i}{2} y_2, \quad x_2 = y_2. \quad ▪$$

Пример 67.6. Найти канонический вид квадратичной формы
$$f = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица квадратичной формы равна $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ее угловые миноры равны соответственно: $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = 8$.

Согласно формулам Якоби каноническими коэффициентами квадратичной формы являются числа
$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{1} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -3, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = -\frac{8}{3},$$
так что каноническим видом квадратичной формы будет форма
$$y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{8}{3}y_3^2. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

67.1. Составить матрицы данных билинейных форм в n-мерном линейном пространстве:

1) x_1y_1 $(n = 1)$; 2) x_1y_1 $(n = 2)$; 3) $x_1y_2 - x_2y_1$ $(n = 2)$;

4) $2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2$ $(n = 2)$;

5) $x_1y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1$ $(n = 3)$;

6) $x_1y_2 - 3x_1y_3 + 7x_2y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + 7x_3y_2 + x_3y_3$ $(n = 3)$;

7) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$; 8) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} (i-j)x_iy_j$; 9) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_{n+1-i}$;

10) $\sum\limits_{|i-j|\le 1} x_iy_j$; 11) $\sum\limits_{i-j\le 2} x_iy_j$.

67.2. Для симметричных билинейных форм из предыдущей задачи записать соответствующие им квадратичные формы.

67.3. По данной квадратичной форме $\mathcal{A}(x, x)$ в n-мерном пространстве восстановить полярную к ней билинейную форму $\mathcal{A}(x, y)$:

1) $-3x_1^2$ $(n = 1)$; 2) $-18x_1x_2 + 9x_2^2$ $(n = 2)$;

3) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$ $(n = 3)$;

4) $2x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$ $(n = 3)$; 5) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

67.4. Выписать общий вид квадратичной формы, имеющей в некотором базисе матрицу:

1) $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

5) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, где $a_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \neq 1. \end{cases}$

67.5. Как изменится матрица билинейной (квадратичной) формы, если изменить базис $e_1, \ldots, e_n$ следующим образом:

1) поменять местами i-й и j-й векторы базиса;

2) умножить i-й базисный вектор на число $\alpha \neq 0$;

3) вектор e_i заменить на $e_i + \alpha e_j$ $(j \neq i)$;

4) векторы базиса записать в обратном порядке?

67.5.1. Доказать, что для любой билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ множество $N_{\mathcal{A}} = \{x \in V \,|\, \mathcal{A}(x, y) = 0 \forall y \in V\}$ образует линейное подпространство. Показать, что ранг $\mathcal{A}(x, y)$ равен r тогда и только тогда, когда

$$\dim N_{\mathcal{A}} = \dim V - r.$$

67.6. Квадратичная форма и линейный оператор имеют в некотором базисе одинаковые матрицы. Какой должна быть матрица перехода от этого базиса к другому базису для того, чтобы в другом базисе матрицы квадратичной формы и линейного оператора также совпадали?

67.7. *Треугольным преобразованием координат* называется преобразование вида

$$\begin{aligned} x_1 &= q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1n}y_n, \\ x_2 &= \qquad q_{22}y_2 + \ldots + q_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \qquad\qquad\qquad q_{nn}y_n, \end{aligned}$$

где $q_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. Доказать, что:

а) треугольное преобразование не вырождено и преобразование, обратное у нему, тоже треутольное;

б) угловые миноры Δ_k, $k = \overline{1, n}$, матрицы квадратичной формы при треугольном преобразовании координат, в котором все коэффициенты q_{ii}, $i = \overline{1, n}$, равны 1, не изменяются.

67.8. Доказать, что:

а) для того чтобы квадратичную форму f ранга r треугольным преобразованием можно было привести к каноническому

виду

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2,$$

где $\lambda_k \neq 0$ $(k = \overline{1,r})$, необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры матрицы A квадратичной формы удовлетворяли условиям

$$\Delta_k \neq 0 \quad (k \leq r), \qquad \Delta_k = 0 \quad (k > r);$$

б) указанный канонический вид определен однозначно, причем его коэффициенты находятся по формулам

$$\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \quad k = \overline{1,r},$$

где $\Delta_0 = 1$.

67.9. Найти канонический вид для следующих квадратичных форм:

1) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$;
2) $x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$;
3) $25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2$;
4) $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$;
5) $-16x_1^2 + 24x_1x_2 - 9x_2^2$;
6) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
7) $x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
8) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
9) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;
10) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 8x_1x_2 - 24x_1x_3 + 12x_2x_3$;
11) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;
12) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$.

67.10. Доказать, что билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ в n-мерном пространстве симметрична тогда и только тогда, когда существует базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства, в котором она имеет вид

$$\mathcal{A}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k, \qquad \forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \ \forall y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k.$$

67.11. Найти канонический вид и преобразование координат, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

1) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;
2) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
3) $9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;
4) $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
5) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;
6) $x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4$;
7) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;
8) $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$;

9) $x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4$;
10) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_5 - 2x_4x_6$;
11) $\sum\limits_{k,j=1}^{n} a_k a_j x_k x_j$, где не все числа a_i, $i = \overline{1,n}$, равны нулю;
12) $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum\limits_{k<j} x_k x_j$; 13) $\sum\limits_{k<j} x_k x_j$; 14) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$;
15) $\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - s)^2$, где $s = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$; 16) $\sum\limits_{k<j} |k-j| \cdot x_k x_j$;
17) $4x_1^2 - 12ix_1x_2 - 9x_2^2$; 18) $9x_1^2 + 24(1+i)x_1x_2 + 16x_2^2$;
19) ix_1x_2; 20) $(1+i)x_1^2 + (2+2i)x_1x_3 + ix_2^2 + 3x_3^2$;
21) $x_1^2 + (2-2i)x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ix_2^2 + (2+2i)x_2x_3 + (1+i)x_3^2$;
22) $-x_1^2 - 4ix_1x_2 - (2-2i)x_1x_3 + 4x_2^2 - (4+4i)x_2x_3 + 2ix_3^2$.

67.12. Показать, что отношение конгруэнтности является отношением эквивалентности на множестве квадратных матриц одинакового порядка.

67.13. Доказать, что две квадратичные формы от n переменных эквивалентны тогда и только тогда, когда их матрицы конгруэнтны.

67.14. Для следующих квадратичных форм найти невырожденное линейное преобразование координат, переводящее форму f в форму g:
1) $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$,
$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$;
2) $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$,
$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$;
3) $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3$.

67.15. Выяснить, какие из следующих квадратичных форм в вещественном пространстве эквивалентны между собой:
1) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$, $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;
2) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$,
$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$,
$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$.

67.16. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ выражение $\operatorname{tr}(X^2)$ задает квадратичную форму. Определить ее ранг.

67.16.1. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ выражение $\operatorname{tr}(AX^2)$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная матрица, определяет

квадратичную форму. Найти полярную к ней билинейную форму и показать, что ранг квадратичной формы равен рангу оператора $\mathcal{F}X = AX + XA$.

67.16.2. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ выражение $\operatorname{tr}(AX)^2$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная матрица, определяет квадратичную форму. Найти полярную к ней билинейную форму и показать, что ранг квадратичной формы равен $(\operatorname{rg} A)^2$.

67.17. Показать, что выражение $I(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ является симметричной билинейной формой в пространстве многочленов M_n. Привести ее к каноническому виду при $n = 3$.

67.18. Показать, что выражение $I(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,dt$ является симметричной билинейной формой в пространстве многочленов M_n. Привести ее к каноническому виду при $n = 3$.

§68. Квадратичные формы в вещественном и комплексном пространствах

Пусть $A(x,x)$ – квадратичная форма в вещественном пространстве. Общее число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы ранга r равно r. Число π положительных коэффициентов называется *положительным индексом инерции квадратичной формы*, а число $\nu = r - \pi$ – *отрицательным индексом инерции*, их разность $\sigma = \pi - \nu$ – *сигнатурой*.

Теорема 68.1 (закон инерции). *Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной квадратичной формы не зависят от выбора канонического базиса.*

Обозначим символами $P(\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ и $V(\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ число совпадений и перемен знаков в последовательности вещественных чисел Δ_0, $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.

Теорема 68.2 (сигнатурное правило Якоби). *Пусть $\Delta_0 = 1$, и Δ_k – угловой минор k-го порядка матрицы квадратичной формы $A(x,x)$ ранга r и $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$. Тогда*

$$\pi = P(\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_r), \quad \nu = V(\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_r).$$

Квадратичная форма $A(x,x)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $A(x,x) > 0$ (соответственно $A(x,x) < 0$), $\forall x \neq \theta$. Такие формы называют *знакоопределенными* (или *знакопостоянными*).

Квадратичная форма $A(x,x)$ называется *неотрицательно (неположительно) определенной*, если $A(x,x) \geq 0$ (соответственно $A(x,x) \leq 0$), $\forall x$. Такие формы называют *полуопределенными*.

Квадратичная форма, для которой существуют векторы x и y такие, что $A(x,x) > 0$, $A(y,y) < 0$, называются *знакопеременными*.

Пример 68.1. Примером положительно определенной квадратичной формы в вещественном пространстве может служить скалярный квадрат в евклидовом пространстве, т.е. отображение $\mathcal{A} : E \to \mathbb{R}$, определенное равенством $\mathcal{A}(x) = (x, x)$, $\forall x \in E$.

Теорема 68.3. *Квадратичная форма $A(x, x)$ положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда ее положительный (соответственно отрицательный) индекс инерции совпадает с размерностью пространства.*

Следствие. Определитель матрицы положительно определенной квадратичной формы положителен.

Теорема 68.4 (критерий Сильвестра). *Квадратичная форма $A(x, x)$ положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда угловые миноры Δ_k, $k = \overline{1,n}$, ее матрицы в произвольном базисе положительны (соответственно чередуют знаки, начиная с отрицательного):*

$$\Delta_k > 0,\ k = \overline{1,n} \qquad (\Delta_k \Delta_{k-1} < 0,\ k = \overline{1,n},\ \Delta_0 = 1).$$

Теорема 68.5. *Пусть V – вещественное линейное пространство. Отображение $A : V \times V \to \mathbb{R}$ является скалярным произведением в пространстве V тогда и только тогда, когда оно есть билинейная форма, полярная к положительно определенной квадратичной форме.*

Матрица билинейной формы, задающей скалярное произведение, совпадает с матрицей Грама базисных векторов: $A_e = G(e_1, \ldots, e_n)$.

В комплексном пространстве полным аналогом вещественных квадратичных форм являются так называемые эрмитовы квадратичные формы.

Пусть теперь V – комплексное линейное пространство. Отображение $A : V \times V \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если для любых $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;
2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$;
3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$;
4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \overline{\alpha} \mathcal{A}(x, y)$.

Полуторалинейную форму называют *эрмитовой*, если

$$\mathcal{A}(y, x) = \overline{\mathcal{A}(x, y)},\ \forall x, y \in V.$$

Пример 68.2. Скалярное произведение (x, y) в унитарном пространстве является эрмитовой полуторалинейной формой.

Для полуторалинейных форм остаются в силе все утверждения, касающиеся билинейных форм. В частности:

– общий вид полуторалинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ в базисе e задается равенством: $\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} x_k \overline{y_j}, \tag{68.1}$$

где $a_{kj} = \mathcal{A}(e_k, e_j)$, или, в компактной форме,

$$\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e \overline{y_e} = y_e^H A_e^T x_e;$$

– если e и $f = eQ$ – два базиса пространства, то $A_f = Q^T A_e \overline{Q}$;

– полуторалинейная форма эрмитова тогда и только тогда, когда ее матрица в любом базисе эрмитова.

Теорема 68.6. *Полуторалинейная форма эрмитова тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}(x,x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$.

Пусть $\mathcal{A}(x,y)$ – эрмитова полуторалинейная форма в комплексном пространстве V. *Эрмитовой квадратичной формой* (или, короче, *эрмитовой формой*) называется отображение $\mathcal{A} : V \to \mathbb{C}$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x,x)$. Полуторалинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ при этом называется *полярной полуторалинейной формой* к эрмитовой форме $\mathcal{A}(x,x)$.

Эрмитова квадратичная форма обладает всеми свойствами (с очевидными изменениями) обычных квадратичных форм. В частности:

1) существует взаимно однозначное соответствие между эрмитовыми полуторалинейными и эрмитовыми квадратичными формами пространства;

2) матрица эрмитовой квадратичной формы в любом базисе эрмитова;

3) общий вид эрмитовой квадратичной формы: $\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} x_k \overline{x_j}, \quad a_{kj} = \overline{a_{jk}} \quad (\forall k, j = \overline{1,n}),$$

или, в компактной форме,

$$\mathcal{A}(x,x) = x_e^T A_e \overline{x_e} = x_e^H A_e^T x_e, \quad A_e^H = A_e;$$

4) канонический вид эрмитовой квадратичной формы задается равенством:

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k |x_k|^2, \quad \forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

где $r = \operatorname{rg} \mathcal{A}(x,x)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,r})$;

5) метод Лагранжа приведения к каноническому виду применим и для эрмитовой формы;

6) остаются справедливыми формулы Якоби;

7) эрмитова квадратичная форма принимает только вещественные значения;

8) для эрмитовых квадратичных форм справедливы закон инерции, сигнатурное правило Якоби, критерий Сильвестра;

9) отображение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{C}$ есть скалярное произведение в комплексном пространстве V тогда и только тогда, когда оно является полуторалинейной формой, полярной к положительно определенной эрмитовой форме.

Канонический вид квадратичной формы (эрмитовой формы), в котором все ненулевые канонические коэффициенты равны 1 или -1, называется *нормальным видом*.

Пример 68.3. Найти нормальный вид квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица квадратичной формы f имеет вид $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, ее угловые миноры равны $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = -7$. Согласно формулам Якоби за канонический вид формы f можно взять форму

$$y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3} y_3^2$$

с каноническими коэффициентами $\frac{\Delta_1}{1}=1$, $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=-3$, $\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=\frac{7}{3}$.

Последняя форма после преобразования координат

$$z_1=y_1,\quad z_2=\sqrt{3}y_2,\quad z_3=\sqrt{7/3}y_3$$

примет нормальный вид

$$z_1^2-z_2^2+z_3^2.\ \blacksquare$$

Пример 68.4. Показать, что квадратичная форма

$$f=\sum_{j=1}^{n}(n+2-j)x_j^2+2\sum_{j=1}^{n-1}x_jx_{j+1}$$

положительно определена.

Решение. Для проверки положительной определенности квадратичной формы f составим ее матрицу и воспользуемся критерием Сильвестра. Имеем

$$A=\begin{bmatrix} n+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & n-1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Критерий Сильвестра удобнее применить не к матрице A, а к матрице A_1, получаемой из A перестановкой сначала строк, а затем столбцов в обратном порядке:

$$A_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & n+1 \end{bmatrix}.$$

Матрица A_1 соответствует квадратичной форме, получаемой из f перенумерацией переменных $x_1,\dots,x_n$ в обратном порядке. Поэтому (в силу критерия Сильвестра) квадратичная форма f положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры Δ_k, $k=\overline{1,n}$, матрицы A_1 положительны.

Составим рекуррентное соотношение для Δ_k:

$$\Delta_k=k\Delta_{k-1}-\Delta_{k-2},\quad k\geq 3,$$

и перепишем его в более удобном виде:

$$\Delta_k-\Delta_{k-1}=(k-2)\Delta_{k-1}+(\Delta_{k-1}-\Delta_{k-2}). \tag{68.2}$$

С помощью (68.2) и метода математической индукции докажем, что

$$\Delta_k>\Delta_{k-1}>0.$$

Действительно, $\Delta_1=0$ и $\Delta_2=5>\Delta_1$. Пусть $\Delta_k>\Delta_{k-1}>0$, $k\geq 2$. Тогда из (68.2) следует, что

$$\Delta_{k+1}=\Delta_k+(k-1)\Delta_k+(\Delta_k-\Delta_{k-1})>\Delta_k.$$

Таким образом, $\Delta_k > 0$ для всех $k = \overline{1,n}$, и следовательно, квадратичная форма f положительно определена. ▪

Пример 68.5. Для полуторалинейной формы

$$f = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}$$

выписать соответствующую ей эрмитову квадратичную форму и привести эту форму к каноническому виду. Найти приводящее к этому виду преобразование координат.

Решение. Матрица формы f имеет вид $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$. Так как $A^H = A$, то эта полуторалинейная форма эрмитова и, следовательно, она порождает эрмитову квадратичную форму g. Матрица эрмитовой формы g совпадает с матрицей A, поэтому

$$g = 2|x_1|^2 + ix_1\overline{x_2} - ix_2\overline{x_1} + 2|x_2|^2.$$

Для приведения к каноническому виду применим метод Лагранжа (в комплексном случае – это метод выделения квадратов модулей). Заметим предварительно, что для комплексных чисел a и b:

$$|a+b|^2 = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = a\overline{a} + a\overline{b} + \overline{a}b + b\overline{b}.$$

Имеем:

$$g = 2\left(x_1\overline{x_1} + x_1\overline{\left(\frac{-i}{2}x_2\right)} + \overline{x_1}\left(\frac{-i}{2}x_2\right) + \left(\frac{-i}{2}x_2\right)\left(\frac{i}{2}\overline{x_2}\right)\right) -$$
$$-2\cdot\frac{1}{4}x_2\overline{x_2} + 2x_2\overline{x_2} = 2\left(x_1 - \frac{i}{2}x_2\right)\overline{\left(x_1 - \frac{i}{2}x_2\right)} + \frac{3}{2}x_2\overline{x_2}.$$

Таким образом, каноническим видом квадратичной формы g будет форма

$$g = 2|y_1|^2 + \frac{3}{2}|y_2|^2,$$

где $y_1 = x_1 - \frac{i}{2}x_2$, $y_2 = x_2$. Формулы преобразования координат имеют вид $x_1 = y_1 + \frac{i}{2}y_2$, $x_2 = y_2$. ▪

ЗАДАЧИ

68.1. Применяя сигнатурное правило Якоби, найти нормальный вид, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру следующих квадратичных форм:

1) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
2) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
3) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
4) $-3x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3$;
5) $x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3$;
6) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_1(x_2 + x_3 + x_4)$.

68.2. Пользуясь сигнатурным правилом Якоби, найти индексы инерции следующих квадратичных форм:

1) $x_1^2 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$;

3) $-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum\limits_{k<j} x_k x_j$; 4) $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + 4\sum\limits_{k<j} x_k x_j$;

5) $a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + 2b\sum\limits_{k<j} x_k x_j$, где $a > b > 0$ – произвольные числа.

68.3. Пусть главный минор Δ_k, $k < n$, матрицы квадратичной формы от n переменных равен нулю, но миноры Δ_{k-1} и Δ_{k+1} отличны от нуля. Доказать, что в этом случае $\Delta_{k-1}\Delta_{k+1} < 0$.

68.4. Пусть в последовательности $\Delta_0 = 1, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ главных миноров матрицы квадратичной формы от n переменных определитель $\Delta_n \neq 0$, но при некотором $k < n$ минор $\Delta_k = 0$, однако $\Delta_{k-1}\Delta_{k+1} \neq 0$. В каждом таком случае нулевому минору Δ_k в рассматриваемой последовательности припишем произвольный знак. Показать, что модифицированное таким образом сигнатурное правило Якоби сохраняет силу.

68.5. Применяя модифицированное правило Якоби из предыдущей задачи, найти нормальный вид, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру следующих квадратичных форм:

1) $-3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$;

2) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$;

3) $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4$;

4) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$;

5) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.

68.6. Показать, что ранг и сигнатура квадратичной формы имеют одинаковую четность.

68.7. Доказать, что в положительно определенной квадратичной форме все коэффициенты при квадратах переменных положительны. Является ли это условие достаточным для положительной определенности формы?

68.7.1. Доказать следующее обобщение критерия Сильвестра: квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда существует последовательность окаймляющих[2] друг в друга положительных главных миноров D_k k-го

[2]См. задачу 16.19 из [11, §16].

порядка ($k = \overline{1,n}$) ее матрицы в произвольном базисе.

68.8. Доказать, что для того, чтобы квадратичная форма $A(x,x)$ была неотрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были неотрицательны. Является ли условие неотрицательности только угловых миноров достаточным для неотрицательной определенности квадратичной формы?

68.9. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

1) $\lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda+3)x_2^2$;
2) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
3) $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
4) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;
5) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
6) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;
7) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;
8) $x_1^2 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
9) $(4-\lambda)x_1^2 + (4-\lambda)x_2^2 - (2+\lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.

68.10. Пусть в квадратичной форме $f(x_1,\ldots,x_n)$ коэффициент $a_{11} > 0$. Выяснить, каков будет результат следующей замены переменных:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n),$$
$$y_k = x_k, \quad k = \overline{2,n}.$$

68.11. Доказать, что положительно определенную квадратичную форму можно привести к нормальному виду треугольным преобразованием переменных (см. задачу 67.7).

68.12. Привести к нормальному виду треугольным преобразованием переменных следующие квадратичные формы:

1) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
2) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;
3) $x_1^2 + 4x_2^2 + 11x_3^2 + 24x_4^2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 16x_3x_4$.

68.13. Доказать, что квадратичная форма $A(x,x)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее матрица A_e хотя бы в одном базисе e представляется в виде $A_e = S^TS$, где S – верхняя треугольная невырожденная матрица. Такое разложение матрицы A_e называется ее *треугольным разложением.*

68.14. Показать, что диагональные элементы матрицы S в треугольном разложении матрицы A и главные миноры Δ_k матрицы A связаны соотношениями:

$$s_{kk}^2 = \Delta_k/\Delta_{k-1}, \quad k = \overline{1,n}, \qquad \Delta_0 = 1.$$

68.15. Доказать, что треугольное разложение положительно определенной матрицы A единственно, если дополнительно потребовать, чтобы диагональные элементы матрицы S были положительны.

68.16. Показать, что элементы s_{kj} матрицы S в треугольном разложении положительно определенной матрицы $A = (a_{kj}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ могут быть вычислены по формулам:

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \; j = \overline{2,n},$$

$$s_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} s_{pk}^2}, \quad k > 1,$$

$$s_{kj} = s_{kk}^{-1}\Big(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} s_{pk}s_{pj}\Big), \quad j > k.$$

68.17. Используя формулы предыдущей задачи, найти треугольные разложения следующих матриц:

$$1)\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; 2)\begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}; 3)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{bmatrix}.$$

68.18. Доказать, что для того, чтобы вещественная симметрическая матрица A представлялась в виде $A = B^TB$, где B – вещественная невырожденная матрица, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A были положительны.

68.19. Доказать, что для того чтобы вещественная симметрическая матрица A представлялась в виде $A = B^TB$, где B – вещественная квадратная матрица, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были неотрицательны. Кроме того, если $\operatorname{rg} A = r$, то и $\operatorname{rg} B = r$, и можно считать, что первые r строк матрицы B линейно независимы, а остальные – нулевые.

68.20. Доказать, что ранг билинейной формы равен единице тогда и только тогда, когда она является произведением двух ненулевых линейных форм.

68.21. Доказать, что для представимости вещественной квадратичной формы в виде произведения двух вещественных линейных форм необходимо и достаточно, чтобы ранг этой квадратичной формы не превосходил единицы, либо ранг был равен двум, а сигнатура равна нулю.

68.22. Пусть для ненулевой билинейной формы $\mathcal{A}$ в вещественном пространстве V существует такое число α, что для любых $x, y \in V$ выполнено равенство:

$$\mathcal{A}(x, y) = \alpha \mathcal{A}(y, x).$$

Доказать, что $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

68.23. Пусть $\mathcal{A}$ – билинейная форма в вещественном пространстве V и всякий раз, когда выполнено равенство $\mathcal{A}(x, y) = 0$, имеет место и равенство $\mathcal{A}(y, x) = 0$. Доказать, что форма $\mathcal{A}$ либо симметрична, либо кососимметрична, т.е. для любых $x, y \in V$ выполнено равенство $\mathcal{A}(x, y) = -\mathcal{A}(y, x)$.

68.24. Доказать, что если произведение двух линейных форм, заданных в вещественном линейном пространстве V, тождественно равно нулю, т.е. $l_1(x)l_2(x) = 0$ для любого $x \in V$, то хотя бы одна из этих форм тождественно равна нулю.

68.25. Доказать, что если симметричная билинейная форма $\mathcal{A}(x, y)$, заданная в вещественном линейном пространстве V, распадается в произведение двух линейных форм: $\mathcal{A}(x, y) = l_1(x)l_2(y)$, то она представима в виде $\mathcal{A}(x, y) = \lambda l(x)l(y)$, где λ – число, отличное от нуля, а $l(x)$ – некоторая линейная форма.

68.26. Выяснить, при каком необходимом и достаточном условии квадратичные формы $f(x)$ и $-f(x)$ могут быть приведены к одному и тому же каноническому виду.

68.27. Доказать, что если неотрицательная квадратичная форма обращается в нуль хотя бы при одном ненулевом наборе вещественных значений переменных, то эта форма вырождена.

68.28. Пусть $f(x)$ – квадратичная форма в вещественном линейном пространстве V. Вектор $x_0 \in V$ называется *изотропным*, если $f(x_0) = 0$. Доказать, что если квадратичная форма $f(x)$ знакопеременна, то в пространстве V существует базис, состоящий из изотропных векторов.

68.29. Показать, что:

1) если $\mathcal{A}(x, y)$ – билинейная форма в комплексном пространстве V, то форма $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{A}(x, \overline{y})$ является полуторалинейной;

2) если $\mathcal{B}(x, y)$ – полуторалинейная форма в комплексном

пространстве V, то форма $\mathcal{A}(x,y) = \mathcal{B}(x,\overline{y})$ является билинейной.

68.30. Составить матрицы следующих полуторалинейных форм, действующих в n-мерном комплексном пространстве V:

1) $-ix_1\overline{y_1}$ $(n=1)$; 2) $-ix_1\overline{y_1}$ $(n=2)$;

3) $3x_1\overline{y_1} + 4ix_1\overline{y_2} - 5x_2\overline{y_1} + ix_2\overline{y_2}$ $(n=2)$;

4) $-3ix_1\overline{y_1} + 2x_1\overline{y_2} + 2x_2\overline{y_1} + (1-i)x_2\overline{y_2}$ $(n=2)$;

5) $(1+i)x_1\overline{y_2} + (1+i)x_2\overline{y_1} - 5x_2\overline{y_2}$ $(n=2)$;

6) $(1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} - 5x_2\overline{y_2}$ $(n=2)$;

7) $x_1\overline{y_1} - 3x_2\overline{y_2} + (2+i)x_3\overline{y_3} - ix_1\overline{y_2} + (4+i)x_3\overline{y_1}$ $(n=3)$;

8) $2x_1\overline{y_1} - 6x_2\overline{y_2} + 3x_3\overline{y_3} + 3x_1\overline{y_2} + 3x_2\overline{y_1} + (2-5i)x_1\overline{y_3} + (2+5i)x_3\overline{y_1} + 4ix_2\overline{y_3} - 4ix_3\overline{y_2}$ $(n=3)$;

9) $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}$; 10) $\sum\limits_{k\neq j} x_k\overline{y_j}$.

68.31. Какие полуторалинейные формы из предыдущей задачи эрмитовы? Записать соответствующие им эрмитовы квадратичные формы.

68.32. Восстановить эрмитову полуторалинейную форму $\mathcal{A}(x,y)$ по эрмитовой квадратичной форме $f(x) = \mathcal{A}(x,x)$.

68.33. Доказать, что в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ функция $f(x) = \operatorname{tr}(X^H X)$ задает положительно определенную эрмитову квадратичную форму.

68.34. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ выражение $\operatorname{tr}(AX^T X)$ задает положительно определенную квадратичную форму тогда и только тогда, когда матрица A положительно определена.

68.35. Доказать, что в пространстве многочленов M_n с комплексными коэффициентами выражение $I(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}\rho(t)dt$, в котором непрерывная функция $\rho(t)$ положительна на $[a,b]$, задает эрмитову полуторалинейную форму.

§69. Квадратичные формы в евклидовом и унитарном пространствах

Теорема 69.1. *Для любой квадратичной формы (эрмитовой квадратичной формы) $\mathcal{A}(x,x)$ в евклидовом (унитарном) пространстве V существует, и притом единственный, самосопряженный оператор $\mathcal{H} \in$*

$\mathcal{L}(V,V)$ *такой, что*

$$A(x,x) = (\mathcal{H}x, x), \quad \forall x \in V.$$

Теорема 69.2. *Для любой квадратичной формы (эрмитовой квадратичной формы) в евклидовом (унитарном) пространстве V существует ортонормированный базис, в котором она имеет канонический вид.*

Операция построения ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется *приведением квадратичной формы к главным осям.*

Канонический базис квадратичной формы $A(x,x)$ совпадает с ортонормированным базисом из собственных векторов соответствующего самосопряженного оператора $\mathcal{H}$, а канонические коэффициенты – с отвечающими им собственными значениями. Собственные значения оператора $\mathcal{H}$ являются корнями уравнения $|A_e - \lambda I| = 0$, которые, вообще говоря, уже не зависят от оператора $\mathcal{H}$ и инвариантно связаны только с самой квадратичной формой.

Таким образом, при приведении квадратичной формы к главным осям *канонические коэффициенты определены однозначно.* Это позволяет находить канонический вид квадратичной формы, минуя вычисление канонического базиса.

Что же касается канонического базиса, то он определен с той же степенью произвола, с какой определена полная ортонормированная система из собственных векторов самосопряженного оператора.

Теорема 69.3 (о паре квадратичных форм). *Для любой пары квадратичных форм (эрмитовых квадратичных форм) $A(x,x)$ и $B(x,x)$ в вещественном (комплексном) пространстве V, одна из которых положительно определена, существует базис, в котором обе квадратичные формы имеют канонический вид.*

Пример 69.1. Найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$$

ортогональным преобразованием, не находя самого преобразования.

Решение. Решим задачу для удвоенной квадратичной формы

$$2f = \sum_{i=1}^{n-1} 2x_i x_{i+1}.$$

Матрица этой квадратичной формы имеет трехдиагональный вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Известно, что при ортогональном преобразовании координат, приводящем f к каноническому виду, канонические коэффициенты определены однозначно и совпадают с собственными значениями матрицы A. Для вычисления собственных значений A необходимо найти корни следующего урав-

нения

$$D_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Воспользуемся методом рекуррентных соотношений (§7) вычисления определителя трехдиагональной матрицы

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

при $\alpha+\beta=-\lambda$, $\alpha\beta=1$:

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

Из равенства $D_n=0$ следует, что $(\alpha/\beta)^{n+1}=1$ или

$$\frac{\alpha}{\beta} = \cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{n+1}, \quad k=\overline{1,n}$$

($k\neq 0$, так как $\alpha\neq\beta$). Отсюда с учетом соотношения $\alpha\beta=1$ получаем

$$\alpha = \pm\Big(\cos\frac{\pi k}{n+1} + i\sin\frac{\pi k}{n+1}\Big),\ \beta = \pm\Big(\cos\frac{\pi k}{n+1} - i\sin\frac{\pi k}{n+1}\Big),\ k=\overline{1,n}.$$

Знаки $\pm$ для α и β надо брать одинаковыми, так как $\alpha\beta=1$. Следовательно, $\lambda=-(\alpha+\beta)=\pm 2\cos\frac{\pi k}{n+1}$, $k=\overline{1,n}$. Все эти числа являются корнями характеристического многочлена, но среди них есть совпадающие: $-\cos\frac{\pi k}{n+1}=\cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}$. Поэтому все различные числа содержатся в системе

$$\lambda_k = 2\cos\frac{\pi k}{n+1}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Так как степень характеристического многочлена равна n, то найденная система содержит все корни характеристического многочлена, причем кратных корней нет. Эти корни вещественны и представляют собой полный спектр рассматриваемой симметрической матрицы A. Поэтому $2f=\sum\limits_{k=1}^{n} 2\cos\frac{\pi k}{n+1}\cdot y_k^2$ и

$$f = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi k}{n+1}\cdot y_k^2. \quad \blacksquare$$

Пример 69.2. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду (к главным осям) квадратичную форму

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

и выписать этот канонический вид.

Решение. Матрица квадратичной формы f равна

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Известно, что при ортогональном преобразовании координат, приводящем f к каноническому виду, каноническими коэффициентами будут собственные значения матрицы A, а каноническим базисом – ортонормированный базис из ее собственных векторов.

Найдем собственные значения матрицы A. Имеем

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычтем из 2-й} \\ \text{и 3-й строк 1-ю} \\ \text{строку} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1+\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \operatorname{tr} A - \lambda_1 - \lambda_2 = 5$.

Найдем ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A. Для $\lambda = -1$ линейно независимую систему собственных векторов образуют векторы $f_1 = (-1,1,0)^T$, $f_2 = (-1,0,1)^T$. Процесс ортогонализации приводит систему f_1, f_2 к ортонормированной системе

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T.$$

Для $\lambda = 5$ линейно независимая система собственных векторов состоит из одного вектора $f_3 = (1,1,1)^T$ или, после нормирования, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

Таким образом, каноническим видом квадратичной формы f в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 будет форма

$$-y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2,$$

матрица преобразования координат равна

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

и следовательно, формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3. \end{aligned}$$

Пример 69.3. Найти унитарное преобразование, приводящее к каноническому виду (к главным осям) эрмитову квадратичную форму

$$f = 2|x_1|^2 + 2ix_1\overline{x_2} - 2ix_2\overline{x_1} - |x_2|^2,$$

и построить этот канонический вид.

Решение. Матрица эрмитовой квадратичной формы f имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & -1 \end{bmatrix}.$$

Как следует из теорем 69.1 и 69.2, при унитарном преобразовании координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Q^H = Q^{-1},$$

приводящем f к каноническому виду, каноническими коэффициентами будут собственные значения матрицы A. Так как матрица эрмитовой квадратичной формы при этом изменяется по формуле $A_1 = Q^T A \overline{Q}$, то канонический базис образуют векторы, комплексно сопряженные к ортонормированным собственным векторам эрмитовой матрицы A.

Найдем собственные значения матрицы A. Имеем

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2i \\ -2i & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Следовательно, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$.

Найдем ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A. Для $\lambda_1 = 3$ нормированным собственным вектором является вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -i)^T$, а для $\lambda_2 = -2$ – вектор $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2i)^T$.

Тем самым, каноническим видом эрмитовой квадратичной формы f в ортонормированном базисе e_1, e_2 будет форма

$$3|y_1|^2 - 2|y_2|^2,$$

матрица преобразования координат равна

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ i & -2i \end{bmatrix},$$

и следовательно, формулы преобразования координат имеют вид

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{i}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_2). \quad \blacksquare$$

Пример 69.4. Проверить, что квадратичная форма $g = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$ положительно определена, и найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма $f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_3 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$ преобразованием координат, приводящим квадратичную форму g к нормальному виду, не находя самого этого преобразования.

Решение. Квадратичные формы f и g имеют матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & -28 & 16 \\ 7 & 16 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы B положительны ($\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 4, \Delta_3 = 4$) и согласно критерию Сильвестра квадратичная форма g положительно определена. Известно (задача 69.14), что если общим преобразованием координат

квадратичная форма f приводится к каноническому виду, а квадратичная форма g к нормальному виду, то канонические коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ квадратичной формы f определены однозначно (с точностью до их порядка) и являются корнями λ-уравнения пары форм f и g: $|A - \lambda B| = 0$.

Найдем эти корни. Имеем

$$|A-\lambda B| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 7-\lambda \\ 8 & -28-14\lambda & 16 \\ 7-\lambda & 16 & 14-2\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычтем из 3-й стро-} \\ \text{ки удвоенную 1-ю} \\ \text{строку} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 7-\lambda \\ 8 & -28-14\lambda & 16 \\ \lambda-9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-9)\begin{vmatrix} 8 & 7-\lambda \\ -28-14\lambda & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(\lambda-9)(\lambda^2-81) = 0.$$

Таким образом, $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$ и каноническим видом квадратичной формы f будет форма

$$9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2. \quad \blacksquare$$

Пример 69.5. Проверить, что в паре квадратичных форм

$$f = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 16x_2x_3,$$
$$g = x_1^2 + 2x_2^2 + 26x_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3$$

одна из форм положительно определена. Найти преобразование координат, приводящее эту форму к нормальному виду, а другую – к каноническому виду, и выписать этот канонический вид.

Решение. Квадратичные формы f и g имеют матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -8 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 26 \end{bmatrix}.$$

Квадратичная форма f не является положительно определенной, так как в матрице A угловой минор $\Delta_1 = -1 < 0$. Угловые миноры матрицы B положительны ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1$) и согласно критерию Сильвестра квадратичная форма g положительно определена. Приведем квадратичную форму g к нормальному виду, пользуясь методом Лагранжа:

$$g = (x_1 - x_2 + 4x_3)^2 + x_2^2 + 10x_3^2 + 6x_2x_3 = (x_1 - x_2 + 4x_3)^2 + (x_2 + 3x_3)^2 + x_3^2.$$

Преобразование координат

$$y_1 = x_1 - x_2 + 4x_3, \quad y_2 = x_2 + 3x_3, \quad y_3 = x_3$$

или

$$x_1 = y_1 + y_2 - 7y_3, \quad x_2 = y_2 - 3y_3, \quad x_3 = y_3,$$

т.е. в матричной записи

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{где} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

приводит квадратичную форму g к нормальному виду $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. При этом матрица B квадратичной формы g преобразуется в матрицу $B_1 = I$ и выполнено соотношение $I = Q_1^T B Q_1$.

Выясним, как выглядит квадратичная форма f в новых переменных y_1, y_2, y_3. Матрица A квадратичной формы f перейдет в новую матрицу A_1, связанную с A соотношением $A_1 = Q_1^T A Q_1$. Имеем

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -8 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, квадратичная форма f имеет вид

$$f_1 = -y_1^2 - y_2^2 - 5y_3^2 + 12y_1y_3 - 6y_2y_3.$$

Приведем эту квадратичную форму к главным осям, т.е. найдем ортогональную матрицу Q_2 перехода к новым переменным так, чтобы новая матрица $A_2 = Q_2^T A_1 Q_2$ квадратичной формы стала диагональной. Следует отметить, что при таком преобразовании квадратичная форма g в новых переменных будет снова иметь нормальный вид. Действительно,

$$B_2 = Q_2^T B_1 Q_2 = Q_2^T I Q_2 = Q_2^T Q_2 = I$$

в силу ортогональности матрицы Q_2.

Найдем собственные значения матрицы A_1:

$$|A_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & -1-\lambda & -3 \\ 6 & -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{прибавим к 1-й} \\ \text{строке удвоенную} \\ \text{2-ю строку} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2-2\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -3 \\ 6 & -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -3 \\ 0 & -15 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda+10)(\lambda-4).$$

Итак, числа $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -10$ образуют спектр матрицы A_1. Все собственные значения просты, поэтому каждому из них отвечает ровно один линейно независимый собственный вектор. Для $\lambda_1 = 4$ – это вектор $f_1 = (6, -3, 5)^T$, для $\lambda_2 = -1$ – это вектор $f_2 = (1, 2, 0)^T$, для $\lambda_3 = -10$ – это вектор $f_3 = (-2, 1, 3)^T$.

После нормирования получим ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A_1:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{70}}(6, -3, 5)^T, \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^T, \; e_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 1, 3)^T.$$

Отсюда следует, что новые переменные z_1, z_2, z_3 должны быть введены по формулам

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Q_2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = Q_2^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

где матрица Q_2 имеет вид

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$$

Итак, $Q_1^T A Q_1 = A_1$, $Q_2^T A_1 Q_2 = \Lambda$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(4, -1, -10)$. Следовательно, $(Q_1 Q_2)^T A (Q_1 Q_2) = \Lambda$ и искомое преобразование координат определяется матрицей

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{22}{\sqrt{14}} \\ -\frac{18}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{14}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} x_1 = -\frac{32}{\sqrt{70}} z_1 + \frac{3}{\sqrt{5}} z_2 - \frac{22}{\sqrt{14}} z_3, \\ x_2 = -\frac{18}{\sqrt{70}} z_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} z_2 - \frac{8}{\sqrt{14}} z_3, \\ x_3 = \frac{5}{\sqrt{70}} z_1 + \frac{3}{\sqrt{14}} z_3. \end{cases}$$

Квадратичные формы f и g относительно переменных z_1, z_2, z_3 будут иметь следующий вид

$$f = 4z_1^2 - z_2^2 - 10z_3^2, \quad g = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2. \quad \blacksquare$$

Пример 69.6. Показать, что квадратичные формы

$$f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3,$$
$$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$$

приводятся к каноническим видам одним преобразованием координат. Найти:

а) эти канонические виды;

б) соответствующее преобразование координат.

Решение. Квадратичные формы f и g имеют матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Квадратичная форма f не является положительно определенной, так как в матрице A угловой минор $\Delta_2 < 0$. Угловые миноры матрицы B положительны ($\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 13$, $\Delta_3 = 1$) и согласно критерию Сильвестра квадратичная форма g положительно определена. Следовательно, применим алгоритм, описанный в примере 69.5, и существует преобразование координат, приводящее форму g к нормальному виду $g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, а форму f – к каноническому виду $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$.

а) Канонические коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ квадратичной формы f являются корнями λ-уравнения пары форм f и g (см. пример 69.4):

$$|A - \lambda B| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-2\lambda & -1+\lambda \\ 2-2\lambda & -15-17\lambda & 3+7\lambda \\ -1+\lambda & 3+7\lambda & -3\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2-2\lambda & -15-17\lambda & 3+7\lambda \\ -1+\lambda & 3+7\lambda & -3\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2-2\lambda & -19-13\lambda & 5+5\lambda \\ -1+\lambda & 5+5\lambda & -1-2\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 6) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$ и каноническим видом квадратичной формы f будет форма

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2. \tag{69.1}$$

б) Для того, чтобы найти преобразование координат, приводящее форму g к нормальному виду, а форму f – к каноническому виду (69.1), применим метод Лагранжа к квадратичной форме g:

$$g = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + 13x_2^2 + 2x_3^2 - 10x_2x_3 = \\ = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (3x_2 - x_3)^2.$$

Преобразование координат (легко проверить его невырожденность)

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + 2x_2 - x_3, \\ z_2 = 2x_2 - x_3, \\ z_3 = 3x_2 - x_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = -z_2 + z_3, \\ x_3 = -3z_2 + 2z_3 \end{cases}$$

приводит квадратичную форму g к нормальному виду: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

В новых координатах z_1, z_2, z_3 квадратичная форма f имеет вид

$$f = (z_1 - z_2)^2 - 15(-z_2 + z_3)^2 + 4(z_1 - z_2)(-z_2 + z_3) - \\ -2(z_1 - z_2)(-3z_2 + 2z_3) + 6(-z_2 + z_3)(-3z_2 + 2z_3) = z_1^2 + 2z_2^2 - 3z_3^2,$$

т.е. требуемый канонический вид. Поэтому $y_1 = z_1, y_2 = z_2, y_3 = z_3$ и искомое преобразование задается равенствами

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = -y_2 + y_3, \\ x_3 = -3y_2 + 2y_3. \end{cases} \blacksquare$$

Пример 69.7. Найти преобразование, приводящее каждую из квадратичных форм

$$f = x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3, \\ g = 9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к каноническому виду, и выписать соответствующие канонические виды этих форм.

Решение. Матрицы квадратичных форм f и g равны соответственно

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -6 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что как следует из критерия Сильвестра, ни одна из этих квадратичных форм не является знакоопределенной. Действительно, в матрице A угловой минор $\Delta_1 = 0$, а в матрице B угловые миноры $\Delta_1 = 9$, $\Delta_2 = -18$. Поэтому алгоритм, предложенный в предыдущей задаче, не применим.

Воспользуемся тем, что матрицы A и B перестановочны:

$$AB = BA = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 6 \\ 6 & -9 & -9 \\ 6 & -9 & -9 \end{bmatrix}.$$

Согласно результату задачи 62.49 существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, общих для матриц A и B. Найдем сначала собственные значения матриц A и B.

Для матрицы A имеем:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda+2)(\lambda-4).$$

Итак, спектр матрицы A составляют числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$.

Для матрицы B имеем:

$$|B-\mu I| = \begin{vmatrix} 9-\mu & -6 & -6 \\ -6 & 2-\mu & 1 \\ -6 & 1 & 2-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\mu & -6 & -6 \\ -6 & 2-\mu & 1 \\ 0 & -1+\mu & 1-\mu \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\mu) \begin{vmatrix} 9-\mu & -12 & -6 \\ -6 & 3-\mu & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\mu)(\mu+3)(\mu-15).$$

Итак, спектр матрицы B составляют числа $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -3$, $\mu_3 = 15$.

Для построения ортонормированного базиса из собственных векторов, общих для матриц A и B, воспользуемся тем, что каждое собственное подпространство матрицы A инвариантно относительно матрицы B (задача 59.43) и что в нем содержится собственный вектор матрицы B (задача 59.21).

Так как все собственные значения матриц A и B простые, то все отвечающие им собственные подпространства одномерны. Поэтому каждый ненулевой вектор из собственного подпространства матрицы A является собственным вектором матрицы B.

Собственному значению $\lambda_1 = 0$ матрицы A отвечает собственный вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T$, собственному значению $\lambda_2 = -2$ – собственный вектор $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)^T$, а собственному значению $\lambda_3 = 4$ – собственный вектор $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. Эти же векторы являются собственными векторами и для матрицы B. Остается проверить, что собственному вектору e_1 отвечает собственное значение $\mu_1 = 1$, собственному вектору e_2 – собственное значение $\mu_3 = 15$, и собственному вектору e_3 – собственное значение $\mu_2 = -3$.

Таким образом, если

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

то замена переменных

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \end{aligned}$$

преобразует квадратичные формы к каноническим видам

$$f = -2y_2^2 + 4y_3^2, \quad g = y_1^2 + 15y_2^2 - 3y_3^2. \quad \blacksquare$$

Пример 69.8. Найти преобразование, приводящее каждую из квадратичных форм

$$f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3,$$
$$g = 13x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2x_3$$

к каноническому виду, и выписать соответствующие канонические виды этих форм.

Решение. Матрицы квадратичных форм f и g равны соответственно

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 13 & -8 & 8 \\ -8 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущей задаче, ни одна из этих квадратичных форм не является знакоопределенной (в матрице A: $\Delta_3 = 0$, в матрице B: $\Delta_2 < 0$), однако матрицы A и B перестановочны:

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 26 & -16 & 16 \\ -16 & 5 & -5 \\ 16 & -5 & 5 \end{bmatrix},$$

поэтому построим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, общих для матриц A и B.

Найдем спектр матрицы A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

и спектр матрицы B:

$$|B - \mu I| = \begin{vmatrix} 13-\mu & -8 & 8 \\ -8 & 1-\mu & -4 \\ 8 & -4 & 1-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13-\mu & -8 & 8 \\ -8 & 1-\mu & -4 \\ 0 & -3-\mu & -3-\mu \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-\mu)\begin{vmatrix} 13-\mu & -16 & 8 \\ -8 & 5-\mu & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3-\mu)^2(21-\mu) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = -3, \mu_3 = 21.$$

Для построения ортонормированного базиса из собственных векторов, общих для матриц A и B, поступим так же, как и в примере 69.6: общие собственные векторы будем искать в собственных подпространствах этих матриц.

Для матрицы A:

– собственному значению $\lambda_1 = 0$ отвечает один линейно независимый собственный вектор $f_1 = (0, 1, 1)^T$;

– собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ отвечает двумерное собственное подпространство $L = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \mid \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$.

Для матрицы B:

– собственному значению $\mu_1 = \mu_2 = -3$ отвечает двумерное собственное подпространство $M = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \mid 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$;

– собственному значению $\mu_3 = 21$ отвечает один линейно независимый собственный вектор $g_3 = (2, -1, 1)^T$.

Так как $g_3 \in L$, то в качестве одного из собственных векторов матрицы A, отвечающих собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, можно выбрать вектор $f_3 = g_3$. Аналогично, так как $f_1 \in M$, то в качестве одного из собственных векторов матрицы B, отвечающих собственному значению $\mu_1 = \mu_2 = -3$, можно взять вектор $g_1 = f_1$.

Третий собственный вектор $f_2 = g_2$, общий для матриц A и B, должен принадлежать обоим подпространствам L и M, и поэтому

$$f_2 = g_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in L \cap M \iff \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $f_2 = g_2 = (1, -1, 1)^T$.

После нормировки получим искомый ортонормированный базис из общих собственных векторов:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)^T.$$

Таким образом, если

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

то замена переменных

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \end{aligned}$$

преобразует квадратичные формы к каноническим видам

$$f = 2y_2^2 + 2y_3^2, \quad g = -3y_1^2 - 3y_2^2 + 21y_3^2. \ \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

69.1. Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования:

1) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;
2) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
3) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; 4) $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;
5) $-3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$;
6) $-x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$; 7) $2x_1x_4 + 6x_2x_3$;
8) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4$.

69.2. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду (к главным осям), и выписать этот канонический вид:
1) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
2) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;
3) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
4) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
5) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
6) $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;
7) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$;
8) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 10x_3x_4$;
9) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$;
10) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$;
11) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$;
12) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + 12x_4x_5 + x_5^2$;
13) $4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2$;
14) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_5x_6 + x_6^2$;
15) $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum\limits_{k<j} x_kx_j$; 16) $\sum\limits_{k<j} x_kx_j$.

69.3. Доказать, что невырожденную вещественную квадратичную форму можно привести к нормальному виду ортогональным преобразованием тогда и только тогда, когда ее матрица ортогональна.

69.4. Доказать, что матрица положительно определенной квадратичной формы ортогональна тогда и только тогда, когда эта форма есть сумма квадратов. Как это утверждение формулируется на языке матриц?

69.5. Пусть L – r-мерное линейное подпространство n-мерного евклидова пространства V. Обозначим через $k(x)$ квадрат длины ортогональной проекции вектора x на подпространство

L. Доказать, что отображение $x \mapsto k(x)$ задает квадратичную форму в V. Найти канонический вид этой квадратичной формы.

69.6. Найти унитарное преобразование, приводящее следующие эрмитовы квадратичные формы к каноническому виду (к главным осям), и написать этот канонический вид:

1) $2|x_1|^2 + ix_1\overline{x_2} - ix_2\overline{x_1} + 2|x_2|^2$;

2) $|x_1|^2 + (3-4i)x_1\overline{x_2} + (3+4i)x_2\overline{x_1} + |x_2|^2$;

3) $3|x_1|^2 + 3|x_2|^2 - 5|x_3|^2 + ix_1\overline{x_2} - ix_2\overline{x_1}$;

4) $|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2+x_1\overline{x_2}+x_2\overline{x_1}+ix_1\overline{x_3}-ix_3\overline{x_1}+ix_2\overline{x_3}-ix_3\overline{x_2}$;

5) $12|x_1|^2 - (1+i)x_1\overline{x_2} - (1-i)x_2\overline{x_1} + 2x_1\overline{x_3} + 2x_3\overline{x_1} + (3+3i)x_1\overline{x_4} + (3-3i)x_4\overline{x_1} + 12|x_2|^2 + (1-i)x_2\overline{x_3} + (1+i)x_3\overline{x_2} - 2x_2\overline{x_4} - 2x_4\overline{x_2} + 8|x_3|^2 - (1+i)x_3\overline{x_4} - (1-i)x_4\overline{x_3} + 8|x_4|^2$.

69.7. Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы положительны, и отрицательно определенной тогда и только тогда, когда отрицательны.

69.8. Доказать, что все собственные значения трехдиагональной матрицы порядка 9 вида

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{bmatrix}$$

отрицательны.

69.9. Доказать, что трехдиагональная матрица порядка 10 вида

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{bmatrix}$$

имеет 9 отрицательных собственных значений, а ее максимальное собственное значение больше единицы.

69.10. Доказать, что собственные значения вещественной симметрической матрицы A лежат на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда квадратичная форма с матрицей $A - \lambda_0 I$ положительно определена при любом $\lambda_0 < a$ и отрицательно определена при любом $\lambda_0 > b$.

69.11. Пусть A и B – вещественные симметрические матри-

цы. Доказать, что если собственные значения матрицы A лежат на отрезке $[a, b]$, а собственные значения матрицы B – на отрезке $[c, d]$, то собственные значения их суммы $A+B$ лежат на отрезке $[a+c, b+d]$.

69.12. Доказать, что квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все коэффициенты характеристического многочлена ее матрицы отличны от нуля, и знаки этих коэффициентов чередуются, причем свободный член положителен.

69.13. Пусть f и g – пара квадратичных форм от одних и тех же переменных, причем форма g невырождена. Доказать, что при любом преобразовании координат, приводящем обе формы к каноническому виду

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \quad g = \mu_1 y_1^2 + \ldots + \mu_n y_n^2,$$

совокупность отношений $\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}, \ldots, \dfrac{\lambda_n}{\mu_n}$ одна и та же, причем эти отношения являются корнями λ-уравнения $|A - \lambda B| = 0$, где A и B – матрицы форм f и g соответственно.

69.14. Пусть дана пара квадратичных форм f и g от одних и тех же переменных, причем форма g положительно определена. Доказать, что канонический вид

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

получаемый для формы f при любом линейном преобразовании, приводящем форму g к нормальному виду, определяется однозначно с точностью до порядка слагаемых, причем его коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями λ-уравнения $|A - \lambda B| = 0$, где A и B – матрицы форм f и g соответственно.

69.15. Выяснить, можно ли следующие пары квадратичных форм привести к каноническому виду одним вещественным невырожденным линейным преобразованием:

1) $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$, $g = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;
2) $f = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$, $g = x_1^2 - 2x_1x_2$;
3) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $g = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$.

69.16. Пусть даны две положительно определенные квадратичные формы f и g, и пусть одно невырожденное линейное преобразование переменных приводит форму f к виду $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, а форму g к нормальному виду, а второе преобразование, наоборот, форму f приводит к нормальному виду, а форму g к

виду $\sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i^2$. Найти связь между коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

69.17. Найти канонический вид квадратичной формы f, к которому она приведется преобразованием, приводящим положительно определенную квадратичную форму g к нормальному виду (не находя самого преобразования), если:

1) $f = -4x_1x_2$, $g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$;
2) $f = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$, $g = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$;
3) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $g = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$;
4) $f = 89x_1^2 - 42x_1x_2 + 5x_2^2$, $g = 41x_1^2 - 18x_1x_2 + 2x_2^2$;
5) $f = 7x_1x_2 + 31x_2^2$, $g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$;
6) $f = 8x_1^2 - 5x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$, $g = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$;
7) $f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$,
$g = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4$;
8) $f = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$,
$g = x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3$.

69.18. Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти преобразование переменных, приводящее эти две формы одновременно к каноническому виду, и записать получающиеся канонические виды обеих форм:

1) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$, $g = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$;
2) $f = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_2^2$, $g = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;
3) $f = 11x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$, $g = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$;
4) $f = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$, $g = 2x_1x_2 - x_2^2$;
5) $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $g = 17x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$;
6) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$, $g = -7x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$;
7) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$,
$g = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
8) $f = -x_1^2 - 5x_2^2 - 14x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$,
$g = -x_1^2 - 14x_2^2 - 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
9) $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,
$g = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$;
10) $f = 15x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_1x_2 - 8x_1x_3 + 22x_2x_3$,
$g = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
11) $f = 6x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$,
$g = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

12) $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$,
$g = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_3^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 16x_2x_3$;
13) $f = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_4$,
$g = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4$;
14) $f = x_1^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + 4x_4^2$,
$g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2$.

69.19. Пусть A и B – матрицы квадратичных форм f и g от переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем известно, что форма g положительно определена. Доказать, что:

а) корни λ-уравнения $|A - \lambda B| = 0$ совпадают с собственными значениями симметрической матрицы $B^{-1/2}AB^{-1/2}$;

б) если ортогональная матрица U приводит матрицу $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ к диагональной форме $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ преобразованием подобия:

$$U^T(B^{-1/2}AB^{-1/2})U = D,$$

то замена переменных

$$(x_1 \ldots x_n)^T = S(y_1 \ldots y_n)^T,$$

где $S = B^{-1/2}U$, приводит обе квадратичные формы f и g к каноническим видам:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \qquad g = y_1^2 + \ldots + y_n^2.$$

69.20. Пусть A и B – матрицы квадратичных форм f и g от переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем известно, что форма g невырождена, а матрица $B^{-1}A$ диагонализуема и при этом

$$S^{-1}(B^{-1}A)S = D \equiv \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

где S – невырожденная матрица соответствующего преобразования подобия. Доказать, что:

а) если все диагональные элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы D различны, то квадратичные формы f и g приводятся к каноническим видам одним преобразованием

$$(x_1 \ldots x_n)^T = S(y_1 \ldots y_n)^T;$$

б) в случае, когда среди диагональных элементов матрицы D есть равные числа, то существует ортогональная матрица U такая, что преобразование

$$(x_1 \ldots x_n)^T = SU(y_1 \ldots y_n)^T$$

приводит обе квадратичные формы f и g к каноническим видам.

69.21. Доказать, что если матрицы квадратичных форм f и g перестановочны, то эти квадратичные формы можно одновре-

менно привести к каноническому виду одним невырожденным линейным преобразованием.

69.22. Пользуясь перестановочностью матриц следующих квадратичных форм, найти преобразование переменных, приводящее эти две формы одновременно к каноническому виду, и записать получающиеся канонические виды обеих форм:

1) $f = 6x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 10x_1x_2 - 10x_1x_3 + 10x_2x_3$,
$g = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

2) $f = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,
$g = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

3) $f = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$,
$g = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3$;

4) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$, $g = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$.

69.23. Две квадратичные формы от n переменных называются *ортогонально эквивалентными*, если от одной из них можно перейти к другой посредством ортогонального преобразования переменных. Доказать, что для ортогональной эквивалентности двух форм необходимо и достаточно, чтобы характеристические многочлены их матриц совпадали.

69.24. Выяснить, какие из следующих квадратичных форм ортогонально эквивалентны:

1) $f = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,
$g = -3y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 - 12y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3$,
$h = 11z_1^2 - 4z_2^2 + 11z_3^2 + 8z_1z_2 - 2z_1z_3 + 8z_2z_3$;

2) $f = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 16x_2x_3$,
$g = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - 4y_1y_2 + 4y_1y_3 + 8y_2y_3$,
$h = z_2^2 - z_3^2 + 2\sqrt{2}z_1z_3$.

69.25. Доказать, что любую вещественную невырожденную матрицу A можно представить в виде $A = QR$, где Q – ортогональная матрица и R – верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, и такое представление единственно.

69.26. Доказать, что:

1) любую вещественную невырожденную матрицу A можно представить как в виде $A = Q_1B_1$, так и в виде $A = B_2Q_2$, где матрицы Q_1 и Q_2 ортогональны, а матрицы B_1 и B_2 – симметрические, с положительными угловыми минорами; при этом

каждое из этих представлений единственно;

2) любую комплексную невырожденную матрицу A можно представить как в виде $A = U_1B_1$, так и в виде $A = B_2U_2$, где матрицы U_1 и U_2 унитарны, а матрицы B_1 и B_2 эрмитовы, с положительными угловыми минорами; при этом каждое из этих представлений единственно;

3) если B – симметрическая (или эрмитова) матрица с положительными угловыми минорами и Q – ортогональная (соответственно унитарная) матрица, то:

а) произведения BQ и QB тогда и только тогда будут симметрическими (эрмитовыми) матрицами с положительными угловыми минорами, когда Q – единичная матрица;

б) произведения BQ и QB тогда и только тогда будут ортогональны (унитарны), когда B – единичная матрица.

Глава XVIII. Линейные нормированные пространства

§70. Норма вектора

Пусть V – линейное пространство, вещественное или комплексное. *Нормой* в линейном пространстве V называется отображение $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство V с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ называется *линейным нормированным пространством.* Число $\|x\|$ называется *нормой вектора* x.

Пример 70.1. В евклидовом (унитарном) пространстве норма вектора может быть введена как его длина, т.е. $\|x\| = |x|$. Эта норма называется *евклидовой нормой* и обозначается символом $\|x\|_E$. Итак,

$$\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}.$$

Справедливость аксиом нормы вытекает из свойств длины.

Пример 70.2. В арифметических пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ обычно рассматривают следующие нормы вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|,$$

первые две из которых можно записать единообразно в виде

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Отметим, что норма $\|\cdot\|_2$ совпадает с евклидовой нормой $\|\cdot\|_E$ для стандартного скалярного произведения, поэтому справедливость аксиом нормы для $\|\cdot\|_2$ вытекает из свойств длины. Для норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ справедливость аксиом 1 и 2 очевидна. Аксиома 3 вытекает из неравенства $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$, справедливого для любой пары чисел x_k, y_k, вещественных или комплексных: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1;$$

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} (|x_k| + |y_k|) \leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| =$$

$$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Пример 70.3. Аналогичные нормы рассматриваются в произвольном конечномерном линейном пространстве V (вещественном или комплексном): если $e_1, \ldots, e_n$ – базис V и $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, то

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \text{где } p = 1, 2, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|.$$

Такие нормы называются соответственно *нормами* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ *относительно базиса* $e_1, \ldots, e_n$. Справедливость аксиом нормы проверяется так же, как и в предыдущем примере.

Пример 70.4. В пространствах матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbb{C}^{m \times n}$ рассматривают следующие нормы матрицы $A = (a_{kj})$:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}|; \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \le k \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|;$$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^2 \right)^{1/2} \equiv \left[\operatorname{tr}(A^H A) \right]^{1/2}.$$

Справедливость аксиом нормы проверяется так же, как и в примере 70.2.

Теорема 70.1. *В нормированном пространстве V отображение $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$, определенное равенством*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V,$$

является метрикой.

Последовательность векторов $\{x^{(k)}\}$ в нормированном пространстве V называется *сходящейся по норме* к вектору $a \in V$, если

$$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - a\| = 0.$$

Вектор a при этом называется *пределом последовательности* $\{x^{(k)}\}$ *по норме* $\|\cdot\|$.

Обозначение: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = a$ или $x^{(k)} \to a$.

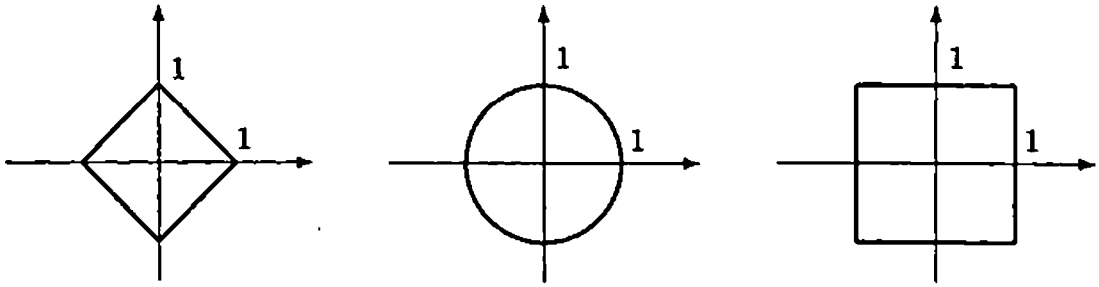
Теорема 70.2. *Сходящаяся по норме последовательность имеет единственный предел.*

Пусть $x_0 \in V$ и $r > 0$. Множество $S(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| = r\}$ называется *сферой радиуса r с центром x_0 по норме* $\|\cdot\|$, а множество $B(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \le r\}$ – *замкнутым шаром радиуса r с центром x_0 по норме* $\|\cdot\|$.

Пример 70.5. Ниже на рис. 1 точками плоскости изображены сферы радиуса 1 с центром $x_0 = (0, 0)$ по нормам $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^2$.

Множество M в нормированном пространстве V называется *ограниченным*, если существует число $c > 0$ такое, что $\|x\| \le c$ для всех векторов $x \in M$. Множество M называется *компактным*, если из любой последовательности векторов, лежащей в M, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме к вектору $a \in M$.

Теорема 70.3. *Сфера $S_E(x_0, r)$ и замкнутый шар $B_E(x_0, r)$ в пространстве с евклидовой нормой являются компактными множествами.*



$\|x\|_1 = 1$ $\|x\|_2 = 1$ $\|x\|_\infty = 1$

Рис.1

Две нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ в линейном пространстве V называются *эквивалентными*, если существуют такие числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что для любого вектора $x \in V$ выполняются неравенства

$$\|x\|' \le c_1\|x\|'' \quad \text{и} \quad \|x\|'' \le c_2\|x\|'.$$

Теорема 70.4. *В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

Следствие. В конечномерном пространстве из сходимости по одной норме следует сходимость по любой другой норме.

Пример 70.6. Показать, что норму в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) можно определить равенством

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \ge 1.$$

Эту норму называют также *нормой Гёльдера с показателем p.*

Решение. Проверка аксиом нормы нетривиальна лишь в случае $p > 1$ для неравенства треугольника, которое для нормы $\|\cdot\|_p$ совпадает с классическим *неравенством Минковского*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}. \tag{70.1}$$

Его вывод опирается на так называемое *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1.$$

Докажем сначала неравенство Гёльдера.

Отметим, что функция $f(x) = x^\alpha - \alpha x$ на интервале $(0, \infty)$ при $\alpha \in (0, 1)$ достигает максимума в точке $x = 1$. Действительно, $f'(x) \equiv \alpha(x^{\alpha-1} - 1) = 0$ при $x = 1$, причем $f'(x) > 0$ при $x \in (0, 1)$ и $f'(x) < 0$ при $x > 1$. Следовательно, $f(x) \le f(1)$, что эквивалентно неравенству

$$x^\alpha - \alpha x \le 1 - \alpha, \qquad \forall \alpha \in (0, 1),\ \forall x > 0.$$

Если в этом неравенстве положить $x = a/b$, $\alpha = 1/p$, где a, b – произвольные положительные числа и $p > 1$, то получим

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right) \le 1 - \frac{1}{p}.$$

После умножения обеих частей на b и очевидных преобразований придем к неравенству

$$a^{1/p}b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \qquad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ p > 1.$$

Это неравенство (называемое *неравенством Юнга*), как нетрудно видеть, справедливо и в случае, когда одно из чисел a или b равно нулю.

Пусть теперь $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ – произвольные вещественные или комплексные числа. Обозначим

$$X = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad Y = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q},$$

и будем считать, что X и Y отличны от нуля (иными словами, среди чисел x_k, $k = \overline{1,n}$, и среди чисел y_k, $k = \overline{1,n}$, есть ненулевые; это условие не ограничивает общности, так как если все числа равны нулю, то неравенство Гёльдера превращается в тривиальное тождество). Положим

$$X_k = \frac{x_k}{X}, \quad Y_k = \frac{y_k}{Y}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Тогда, очевидным образом, $\sum\limits_{k=1}^{n} |X_k|^p = \sum\limits_{k=1}^{n} |Y_k|^q = 1$.

Запишем неравенство Юнга для величин $a = |X_k|^p$ и $b = |Y_k|^q$:

$$|X_k Y_k| \le \frac{1}{p}|X_k|^p + \frac{1}{q}|Y_k|^q.$$

Так как $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то, складывая почленно эти неравенства, получим

$$\sum_{k=1}^{n} |X_k Y_k| \le \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} |X_k|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} |Y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Умножая обе части полученного неравенства $\sum\limits_{k=1}^{n} |X_k Y_k| \le 1$ на величину XY, с учетом принятых обозначений приходим к неравенству Гёльдера.

Перейдем к доказательству неравенства Минковского. Сначала применим неравенство треугольника $|x_k + y_k| \le |x_k| + |y_k|$ к каждому слагаемому в левой части (70.1):

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \le \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p. \tag{70.2}$$

Правую часть этого неравенства преобразуем следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|(|x_k| + |y_k|)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k|(|x_k| + |y_k|)^{p-1}.$$

К каждой полученной сумме применим неравенство Гёльдера, тогда

$$\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p \le \left\{\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\right\}\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Но $(p-1)q=p$, поэтому разделив обе части этого неравенства на величину $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p\right)^{1-(1/p)}$, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p},$$

что с учетом неравенства (70.2) дает неравенство Минковского (70.1). ▪

Пример 70.7. Пусть в пространстве V (вещественном или комплексном) выбран какой-либо базис $e_1,\dots,e_n$ и для каждого вектора $x\in V$ рассматриваются его нормы $\|\cdot\|_p$, $p>1$, относительно этого базиса:

$$x=\sum_{k=1}^{n}x_ke_k \;\mapsto\; \|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Доказать, что выполнено соотношение

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty,$$

где $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k|$.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что координаты вектора x упорядочены по невозрастанию их абсолютных величин, причем

$$|x_1|=\dots=|x_m|>|x_{m+1}|\ge\dots\ge|x_n|.$$

В этом случае имеем $\|x\|_\infty=|x_1|$. Преобразуем далее величину $\|x\|_p$:

$$\|x\|_p=|x_1|\left(m+\sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{x_k}{x_1}\right|^p\right)^{1/p}=|x_1|\cdot\exp\left[\frac{1}{p}\ln\left(m+\sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{x_k}{x_1}\right|^p\right)\right]=$$

$$=|x_1|\cdot\exp\left[\frac{1}{p}\left(\ln m+\ln\left(1+\frac{1}{m}\sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{x_k}{x_1}\right|^p\right)\right)\right].$$

Так как при $k\ge m+1$: $\left|\dfrac{x_k}{x_1}\right|\le 1$, то $\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{k=m+1}^{n}\left|\dfrac{x_k}{x_1}\right|^p=0$. Поэтому

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=|x_1|\lim_{p\to\infty}\exp\left[\frac{1}{p}(\ln m+o(1))\right]=|x_1|=\|x\|_\infty. \;\blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Примеры норм

70.1. Можно ли норму $m(x)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ задать равенством

$$m(x) = \max_{1\le j\le n}(|\operatorname{Re} x_j| + |\operatorname{Im} x_j|), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n)?$$

70.2. Можно ли норму $m(A)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n\times m}$ задать равенством

$$m(A) = \operatorname{rg} A, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times m}?$$

70.3. Можно ли норму $m(f)$ в пространстве M_n задать равенством

$$m(f) = \left[\int_a^b f^2(t)\rho(t)\,dt\right]^{1/2} \quad (a < b), \quad \forall f \in M_n,$$

где $\rho(t)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция?

70.4. Можно ли норму $m(\mathcal{A})$ в пространстве $\mathcal{L}(V, W)$ задать равенством

$$m(\mathcal{A}) = [\operatorname{tr}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})]^{1/2}, \quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)?$$

70.5. Пусть $m(x)$ и $n(x)$ – две нормы в линейном пространстве V. Показать, что нормами в этом пространстве будут и следующие величины:

а) $l(x) = \max(m(x), n(x))$;

б) $s(x) = \alpha m(x) + \beta n(x)$, где α и β – фиксированные неотрицательные числа, не равные одновременно нулю;

в) $r(x) = (m^2(x) + n^2(x))^{1/2}$;

г) $t(x) = (m^p(x) + n^p(x))^{1/p}$, $p \ge 1$.

70.6. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный невырожденный оператор линейного нормированного пространства V с нормой $\|x\|$. Доказать, что нормой пространства V является и величина

$$m(x) = \|\mathcal{A}x\|.$$

70.7. Линейное пространство V является прямой суммой подпространств L_1 и L_2, при этом на L_1 введена норма $m(x)$, на L_2 – норма $n(x)$. Пусть x – произвольный вектор из V, причем $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Положим

$$\|x\| = m(x_1) + n(x_2).$$

Показать, что это соотношение вводит норму на V.

70.8. Доказать, что если $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – эрмитова положительно определенная матрица, то норма $m(x)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ может быть задана равенством:

$$m(x) = (x, Hx)^{1/2}, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$$

относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{C}^n$.

Свойства норм

70.9. Доказать, что если $\|\cdot\|$ – норма в пространстве V, то для любых $x, y \in V$ выполнено неравенство

$$\|x - y\| \geq \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big|.$$

70.10. Доказать, что для евклидовой нормы $\|\cdot\|_E$ в евклидовом пространстве V выполнено *равенство параллелограмма*

$$\|x + y\|_E^2 + \|x - y\|_E^2 = 2(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2), \quad \forall x, y \in V. \qquad (70.3)$$

70.11. Доказать, что верно и обратное: если норма $\|\cdot\|$ в линейном вещественном пространстве V удовлетворяет равенству параллелограмма (70.3), то в V можно ввести скалярное произведение так, чтобы эта норма была евклидовой относительно этого скалярного произведения.

70.12. Доказать, что в любом нормированном пространстве V выполнено соотношение

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \leq 4(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Используя в качестве V пространство $\mathbb{R}^2$ с нормами $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, показать, что величина

$$\frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

может принимать любые значения из промежутка $[1; 4]$ и, тем самым, константы в доказываемом соотношении не улучшаемы.

70.13. 1. Доказать, что норма $\|\cdot\|_p$ в пространстве V относительно заданного базиса $e_1, \ldots, e_n$ удовлетворяет *неравенству Кларксона*: для любых $x, y \in V$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|x\|_p^p + \frac{1}{2}\|y\|_p^p \qquad \text{при } p \geq 2,$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q \leq \left(\frac{1}{2}\|x\|_p^p + \frac{1}{2}\|y\|_p^p\right)^{q/p} \qquad \text{при } 1 < p \leq 2$$

(здесь $p^{-1} + q^{-1} = 1$).

2. Пользуясь неравенством Кларксона, показать, что в пространстве V с нормой $\|\cdot\|_p$ $(1 < p < \infty)$ относительно любого заданного базиса из условия, что различные векторы x, y принадлежат единичной сфере: $\|x\|_p = 1$, $\|y\|_p = 1$, следует, что для любого $\alpha \in (0,1)$ выполнено строгое неравенство $\|\alpha x + (1-\alpha)y\|_p < 1$.

70.14. Нормированное линейное пространство V *называется строго нормированным*, если в неравенстве треугольника $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ знак равенства достигается только в случае, когда векторы x и y линейно зависимы. Доказать, что:

а) евклидово пространство V с евклидовой нормой $\|\cdot\|_E$ строго нормировано;

б) пространство V с нормой $\|\cdot\|_p$ при $1 < p < \infty$ строго нормировано;

в) пространство V с нормой $\|\cdot\|_1$ или с нормой $\|\cdot\|_\infty$ не является строго нормированным.

70.15. Доказать, что если $x^{(k)} \to x^{(0)}$, $y^{(k)} \to y^{(0)}$, то:

а) $\|x^{(k)}\| \to \|x^{(0)}\|$;

б) $\|x^{(k)} - a\| \to \|x^{(0)} - a\|$ для любого вектора a;

в) $\alpha x^{(k)} + \beta y^{(k)} \to \alpha x^{(0)} + \beta y^{(0)}$ для любых чисел α и β;

г) если последовательность чисел λ_k сходится к числу λ_0, то $\lambda_k x^{(k)} \to \lambda_0 x^{(0)}$.

70.16. Доказать, что если всякая нетривиальная[1] подпоследовательность последовательности $\{x^{(k)}\}$ сходится, то сходится и сама последовательность $\{x^{(k)}\}$.

70.17. Доказать, что из всякой ограниченной последовательности векторов конечномерного нормированного пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

70.18. Доказать, что сходимость последовательности $\{x^{(k)}\}$ к вектору $x^{(0)}$ по норме равносильна покоординатной сходимости этой последовательности относительно любого базиса.

70.19. Пусть в пространстве V задан базис $e_1, \ldots, e_n$ и относительно него введены нормы $\|\cdot\|_p$, $1 \le p < \infty$. Доказать, что если $1 \le p_1 < p_2 < \infty$ и $p^{-1} = \alpha p_1^{-1} + (1-\alpha)p_2^{-1}$, $0 < \alpha < 1$, то

[1] Под тривиальной подразумевается подпоследовательность, совпадающая с исходной последовательностью, начиная с некоторого члена.

выполнено неравенство

$$\|x\|_p \le \|x\|_{p_1}^{\alpha} \cdot \|x\|_{p_2}^{1-\alpha}.$$

70.20. Для каждой пары из трех норм: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ в n-мерном пространстве V найти наилучшие возможные константы c_1 и c_2 в определении эквивалентности норм.

70.20.1. Доказать, что в определении эквивалентности норм $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$, $1 \le p < q < \infty$:

$$c_1\|x\|_q \le \|x\|_p \le c_2\|x\|_q, \quad \forall x \in V,$$

наилучшими константами являются числа

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

где n – размерность пространства V.

70.21. В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ наряду с нормой $\|x\|_2$ рассматривается норма $m(x) = \|Ax\|_2$, где A – невырожденная матрица n-го порядка. Как вычислить для этой пары норм наилучшие возможные константы c_1 и c_2 в определении эквивалентности норм?

70.22. Доказать, что отображение $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$, определенное правилом

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{70.4}$$

задает метрику в линейном нормированном пространстве V. Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием между x и y по норме* в пространстве V.

70.23. Показать, что метрика $\rho(x, y)$, введенная в предыдущей задаче, обладает следующими свойствами:

а) $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y) \quad \forall x, y, z \in V$;

б) $\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x, y) \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

70.24. Доказать, что если метрика $\rho(x, y)$ в линейном пространстве V обладает свойствами "а)" и "б)" предыдущей задачи, то она порождается некоторой нормой по формуле (70.4), и эта норма единственна.

Двойственные нормы

70.25. Пусть $m(x)$ – норма в евклидовом (унитарном) пространстве V. Для любого $y \in V$ положим

$$m^*(y) = \sup_{x \ne \theta} \frac{|(x, y)|}{m(x)}.$$

Показать, что эта величина всегда конечна и удовлетворяет всем аксиомам нормы. Полученная таким образом норма $m^*(y)$ называется *двойственной к норме* $m(x)$ относительно скалярного произведения (x, y) в пространстве V.

70.26. Показать, что определение двойственной нормы эквивалентно любому из следующих определений:

а) $m^*(y) = \sup\limits_{m(x)=1} |(x, y)|$; б) $m^*(y) = \max\limits_{x \neq \theta} \dfrac{|(x, y)|}{m(x)}$;

в) $m^*(y) = \max\limits_{m(x)=1} |(x, y)|$; г) $m^*(y) = \max\limits_{x \neq \theta} \dfrac{\operatorname{Re}(x, y)}{m(x)}$;

д) $m^*(y) = \max\limits_{m(x)=1} \operatorname{Re}(x, y)$.

70.27. Пусть $m^*(y)$ – норма, двойственная к норме $m(x)$ в евклидовом (унитарном) пространстве V. Показать, что для любых двух векторов x и y справедливо неравенство

$$|(x, y)| \leq m(x)m^*(y).$$

Показать, что для любого $y \in V$ найдется вектор $x_0 \in V$ такой, что

$$|(x_0, y)| = m(x_0)m^*(y).$$

70.28. Найти двойственную норму для евклидовой нормы вектора.

70.29. В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением найти двойственную норму: а) к норме $\|\cdot\|_\infty$; б) к норме $\|\cdot\|_1$.

70.30. Доказать, что в арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением двойственной к норме $\|\cdot\|_p$, $p > 1$, является норма $\|\cdot\|_q$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Что представляет собой для этой пары норм неравенство из задачи 70.27?

70.31. В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением найти двойственную норму к норме, определенной равенством

$$\|x\| = \|\mathcal{B}x\|_p,$$

где $p \geq 1$, а $\mathcal{B}$ – некоторый невырожденный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$.

70.32. В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ введено скалярное произведение, выражающееся через стандартное скалярное произведение по формуле $(x, y)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, y)$, где $\mathcal{A}$ – заданный по-

ложительно определенный оператор. Найти двойственную норму к норме:

а) $\|x\|_p$, $p \geq 1$,

б) $\|x\| \equiv \|\mathcal{B}x\|_p$, где $p \geq 1$, а $\mathcal{B}$ – некоторый невырожденный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$.

70.33. Известно, что для норм $m(x)$ и $n(x)$ евклидова (унитарного) пространства V при любом векторе x выполняется неравенство $m(x) \geq n(x)$. Показать, что для двойственных норм $m^*(y)$ и $n^*(y)$ имеет место обратное соотношение: $m^*(y) \leq n^*(y)$ для любого вектора y.

70.34. Показать, что норма $m^{**}(x)$, двойственная к двойственной норме $m^*(y)$, совпадает с исходной нормой $m(x)$.

§71. Линейные операторы в нормированных пространствах. Нормы операторов и матриц

Пусть V и W – линейные нормированные пространства (оба вещественные или оба комплексные) с нормами $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$ соответственно. Пространство линейных операторов $\mathcal{L}(V,W)$, будучи само вещественным или комплексным линейным пространством, может быть наделено своей нормой.

Норма $N(\cdot)$ в пространстве $\mathcal{L}(V,W)$ называется *согласованной* с векторными нормами $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ пространств V и W, если для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$

$$\|\mathcal{A}x\|_W \leq N(\mathcal{A})\|x\|_V, \quad \forall x \in V.$$

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ называется *непрерывным на векторе* $x_0 \in V$, если для любой последовательности $\{x^{(k)}\}$, сходящейся к вектору $x^{(0)}$ по норме $\|\cdot\|_V$, последовательность $\{\mathcal{A}x^{(k)}\}$ сходится к вектору $\mathcal{A}x^{(0)}$ по норме $\|\cdot\|_W$. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ называется *непрерывным на множестве* M, если он непрерывен на любом векторе $x^{(0)} \in M$. Оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$, непрерывный на всех векторах пространства V, называется *непрерывным*.

Теорема 71.1. *Линейный оператор, действующий в конечномерных нормированных пространствах, непрерывен.*

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ называется *ограниченным*, если единичную сферу в V он переводит в ограниченное по норме пространства W множество.

Теорема 71.2. *В конечномерных нормированных пространствах V и W любой линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ ограничен.*

Тем самым, отношение $\|\mathcal{A}x\|_W/\|x\|_V$ при всех $x \neq \theta$ ограничено сверху, и для любой пары нормированных пространств V и W в $\mathcal{L}(V,W)$ можно ввести согласованную норму. В дальнейшем в пространстве линейных операторов $\mathcal{L}(V,W)$ будут рассматриваться только согласованные нормы.

Теорема 71.3. *Пусть V, W – конечномерные пространства и*

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. *Отображение, заданное соотношением*

$$\mu(\mathcal{A}) = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V},$$

является нормой в пространстве $\mathcal{L}(V, W)$.

Норма $\mu(\mathcal{A})$ называется *нормой* оператора $\mathcal{A}$, *подчиненной (порожденной)* векторным нормам пространств V и W.

Обозначение: $\|\mathcal{A}\|$. Итак,

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} \equiv \sup_{\|x\|_V = 1} \|\mathcal{A}x\|_W.$$

1. Подчиненная норма обладает свойством согласованности:
$$\|\mathcal{A}x\|_W \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|_V, \forall x \in V.$$
2. Подчиненная норма – наименьшая из всех согласованных норм.
3. Подчиненная норма обладает *свойством мультипликативности*, т.е.
$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$$
для всех операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, для которых определено произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пространства. Норма линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, порожденная евклидовыми нормами вектора, называется *спектральной нормой*. Обозначение: $\|\mathcal{A}\|_2$. Итак,

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\mathcal{A}x\|_E = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)}.$$

Теорема 71.4. *Спектральная норма оператора равна максимальному сингулярному числу этого оператора, т.е.*

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathcal{A}^*\mathcal{A})},$$

где $\rho(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$ *– спектральный радиус оператора* $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Следствие. Спектральная норма нормального оператора равна абсолютному значению максимального по модулю собственного значения этого оператора.

Теорема 71.5. *Сингулярные числа линейного оператора в евклидовом (унитарном) пространстве не изменяются при умножении оператора на ортогональный (унитарный) оператор.*

Следствие. Спектральная норма линейного оператора не изменяется при умножении оператора на ортогональный (унитарный) оператор.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пространств V и W и пусть в пространствах V и W введены векторные нормы $\|\cdot\|_p$, где $p \geq 1$ или $p = \infty$, одинакового типа. Обозначим через $\|\mathcal{A}\|_p$ норму оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, подчиненную векторным нормам $\|\cdot\|_p$, через $A = (a_{kj})$ – матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисах e и f.

Теорема 71.6. *Для любого оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$

$$\|\mathcal{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}|.$$

Теорема 71.7. *Для любого оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$

$$\|\mathcal{A}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|.$$

Векторные нормы $\|\cdot\|_2$ пространств V и W порождают спектральную норму оператора $\|\mathcal{A}\|_2$, так как векторная норма $\|\cdot\|_2$ совпадает с евклидовой нормой $\|\cdot\|_E$, если в пространствах V и W ввести скалярные произведения так, чтобы базисы e и f стали ортонормированными.

Евклидова норма оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, т.е. число

$$\|\mathcal{A}\|_E = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})},$$

обладает многими свойствами подчиненных норм.

1. Если $A_{fe} = (a_{kj})$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в паре ортонормированных базисов e и f пространств V и W соответственно, то

$$\|\mathcal{A}\|_E = \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2\right)^{1/2}.$$

2. *Свойство согласованности:* $\|\mathcal{A}x\|_E \le \|\mathcal{A}\|_E\|x\|_E$ для всех $x \in V$.

3. *Свойство мультипликативности:* $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\|_E \le \|\mathcal{A}\|_E\|\mathcal{B}\|_E$ для всех линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, для которых определено произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

4. $\|\mathcal{A}\|_E^2 = \operatorname{tr}\mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

5. $\|\mathcal{A}\|_E^2 = \rho_1^2 + \cdots + \rho_s^2$, где $\rho_1, \ldots, \rho_s$ – сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$ и $s = \min(m, n)$.

6. $\|\mathcal{A}\|_E \ge \|\mathcal{A}\|_2$.

7. $\|\mathcal{A}\|_E$ не изменяется при умножении оператора $\mathcal{A}$ на ортогональные (унитарные) операторы.

Определения согласованной и подчиненной норм непосредственно распространяются на пространства матриц, рассматриваемых как линейные операторы в арифметических пространствах. Если, в частности, в арифметических пространствах введены нормы $\|\cdot\|_p$, то соответствующая подчиненная норма матрицы $A = (a_{kj})$ размера $m \times n$ обозначается $\|A\|_p$ и при этом в силу теорем 71.6, 71.7 и свойства 1 евклидовой нормы оператора:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{k=1}^{m}|a_{kj}|, \quad \|A\|_E = \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2\right)^{1/2},$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le k\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|.$$

В большинстве задач этого параграфа участвуют матричные нормы, обладающие свойством мультипликативности. Как следует из задачи 71.13, такие нормы согласованы хотя бы с одной из векторных норм в пространствах $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ соответственно.

Теорема 71.8. *Собственное значение линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ не превосходит по абсолютной величине любую его согласованную норму.*

Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в евклидовом (унитарном) пространстве V и $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственным значениям

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n. \tag{71.1}$$

Под нормой $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму $\|\cdot\|_E$, так что если $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, то $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$.

Теорема 71.9. *Для самосопряженного оператора $\mathcal{A}$*

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} (\mathcal{A}x, x), \qquad \lambda_n = \min_{\|x\|=1} (\mathcal{A}x, x).$$

Эта теорема описывает экстремальные свойства и квадратичной формы в евклидовом (унитарном) пространстве: *на единичной сфере квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ принимает экстремальные значения на тех векторах, которые являются собственными векторами соответствующего самосопряженного оператора $\mathcal{H}$* (теорема 69.1).

Теорема 71.10. *Если L – линейная оболочка собственных векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственным значениям $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ из* (71.1), *то*

$$\lambda_{i_1} = \max_{\|x\|=1, x\in L} (\mathcal{A}x, x), \qquad \lambda_{i_k} = \min_{\|x\|=1, x\in L} (\mathcal{A}x, x).$$

Теорема 71.11 (теорема Куранта–Фишера). *Для собственных значений* (71.1) *самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ справедливо представление*

$$\lambda_k = \max_{L_k} \min_{\|x\|=1, x\in L_k} (\mathcal{A}x, x),$$

где максимум берется по всевозможным k-мерным подпространствам L_k пространства V.

ЗАДАЧИ

Примеры и простейшие свойства

71.1. Показать, что если $M(\mathcal{A})$ – согласованная норма в пространстве $\mathcal{L}(V,W)$, то правило $N(\mathcal{A}) = \alpha M(\mathcal{A})$ $(\alpha > 0)$ также будет нормой в этом пространстве, причем согласованной, если $\alpha > 1$.

71.2. Показать, что для любой согласованной нормы $M(\mathcal{A})$ в пространстве $\mathcal{L}(V,W)$ можно выбрать константу $\alpha_0 > 0$, для которой норма $N(\mathcal{A}) = \alpha_0 M(\mathcal{A})$ не будет согласованной.

71.3. Показать, что если $\|\mathcal{A}\|$ – подчиненная норма в $\mathcal{L}(V,W)$, то $N(\mathcal{A}) = \alpha\|\mathcal{A}\|$ – согласованная норма тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 1$.

71.4. Показать, что если норма $M(\mathcal{A})$ в пространстве $\mathcal{L}(V,W)$ не является согласованной, то можно выбрать константу $\alpha > 1$, для которой норма $N(\mathcal{A}) = \alpha M(\mathcal{A})$ будет согласованной.

71.5. Пусть $V \neq W$ и норма $M(\mathcal{A})$ в пространстве $\mathcal{L}(V,W)$ не является согласованной. Показать, что можно изменить норму или в пространстве V, или в пространстве W так, чтобы норма

$M(A)$ стала согласованной с новыми нормами пространств V и W.

71.6. Показать, что для любой согласованной нормы $N(A)$ в пространстве $\mathcal{L}(V,V)$ выполнено неравенство $N(\mathcal{I}) \geq 1$.

71.7. Пусть $\|A\|$ – мультипликативная матричная норма в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$. Показать, что мультипликативными матричными нормами будут и следующие величины:

а) $M(A) = \alpha\|A\|$, $\alpha > 1$;

б) $L(A) = \|A^H\|$;

в) $N(A) = \|P^{-1}AP\|$, где P – невырожденная матрица порядка n.

71.8. Показать, что если $M(A)$ и $L(A)$ – мультипликативные матричные нормы, то величина

$$N(A) = \max\{M(A), L(A)\}$$

также будет мультипликативной матричной нормой.

71.8.1. Доказать, что для любой мультипликативной матричной нормы в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ выполнено неравенство $\|\mathcal{I}\| \geq 1$.

71.9. Доказать, что для любой подчиненной нормы в пространстве $\mathcal{L}(V,V)$ выполнено равенство $\|\mathcal{I}\| = 1$. Верно ли, что если согласованная норма $N(\cdot)$ удовлетворяет условию $N(\mathcal{I}) = 1$, то она является подчиненной?

71.9.1. Доказать, что подчиненная норма в $\mathcal{L}(V,V)$ обладает свойством: $\|\mathcal{A}^{-1}\| \geq 1/\|\mathcal{A}\|$ для любого невырожденного оператора $\mathcal{A}$.

71.10. Пусть $A = (a_{lj}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$. Показать, что функция, определенная равенством

$$K(A) = \sum_{l,j=1}^{n} |a_{lj}|,$$

является мультипликативной матричной нормой. Показать, что норма $K(A)$ не подчинена никакой векторной норме на $\mathbb{C}^n$.

71.11. Пусть E_{lj} – матрица порядка n, у которой единственный ненулевой элемент стоит в позиции (l,j) и равен единице. Показать, что если матричная норма $\|A\|$ для всех l,j удовлетворяет неравенству $\|E_{lj}\| \leq 1$, то

$$\|A\| \leq K(A),$$

где $K(A)$ – норма, определенная в предыдущей задаче.

71.12. Пусть $A = (a_{lj}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$. Показать, что функ-

ция, определенная равенством

$$M(A) = c \cdot \max_{1 \le l,j \le n} |a_{lj}|,$$

является матричной нормой при любом $c > 0$. Показать, что:

а) эта норма является мультипликативной тогда и только тогда, когда $c \ge n$;

б) при $c > 1$ эта норма не подчинена никакой векторной норме;

в) при $c \in (0, 1)$ эта норма не согласована ни с одной векторной нормой в $\mathbb{C}^n$.

71.13. Доказать, что если $\|\cdot\|$ – мультипликативная матричная норма в $\mathbb{C}^{n\times n}$, то в арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ можно ввести норму, относительно которой матричная норма $\|\cdot\|$ будет согласованной.

71.14. Найти спектральную норму:

а) диагональной матрицы;

б) квазидиагональной матрицы.

71.15. Найти евклидову норму:

а) единичной матрицы n-го порядка;

б) унитарной матрицы порядка n.

Каковы спектральные нормы этих матриц?

71.16. Найти евклидову норму самосопряженной матрицы A порядка n, зная ее собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

71.17. Доказать, что спектральная норма матрицы A равна ее евклидовой норме тогда и только тогда, когда A – матрица ранга 1.

71.18. Показать, что спектральная норма ненулевого оператора ортогонального проектирования $\mathcal{P}$, действующего в евклидовом (унитарном) пространстве V, равна единице.

71.19. Доказать, что верно и обратное: если спектральная норма проектора $\mathcal{P}$ равна единице, то $\mathcal{P}$ – оператор ортогонального проектирования.

71.20. Доказать, что для любых унитарных матриц U и V выполнены соотношения

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2, \quad \|UAV\|_E = \|A\|_E.$$

71.21. Доказать, что для любых матриц $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ выполнены неравенства:

а) $\|A\|_E \le \sqrt{n}\|A\|_2$;

б) $\|AB\|_E \le \|A\|_2\|B\|_E$;

в) $\|AB\|_E \leq \|A\|_E \|B\|_2$.

71.22. Доказать, что для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ выполнены неравенства:

а) $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$;

б) $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_p \|A\|_q$, где $p > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

71.23. Пусть матрица A имеет эрмитово разложение $A = H_1 + iH_2$. Доказать, что:

а) $\|H_1\|_2 \leq \|A\|_2$, $\|H_2\|_2 \leq \|A\|_2$;

б) $\|H_1\|_E^2 + \|H_2\|_E^2 = \|A\|_E^2$.

71.24. Доказать, что если $A = H_1 + iH_2$ – эрмитово разложение матрицы A, то для любой эрмитовой матрицы H выполнено неравенство

$$\|A - H\|_E \geq \|A - H_1\|_E.$$

Таким образом, матрица H_1 из эрмитова разложения A является эрмитовой матрицей, ближайшей (в смысле евклидова расстояния) к матрице A. Аналогично, матрица iH_2 – ближайшая к A косоэрмитова матрица. Указать аналог этого свойства на комплексной плоскости.

71.25. Пусть $A = HU$ – полярное разложение матрицы A. Показать, что для матриц H_1 и H_2 ее эрмитова разложения $A = H_1 + iH_2$ выполнено соотношение

$$\|H\|_E^2 = \|H_1\|_E^2 + \|H_2\|_E^2.$$

Какому свойству комплексных чисел соответствует это равенство?

71.26. Доказать, что для всякой положительно определенной матрицы A ближайшей в смысле евклидова расстояния унитарной матрицей является единичная матрица I, наиболее далекой – матрица $-I$. Что изменится, если A – неотрицательная матрица?

71.27. Пусть $A = HU$ – полярное разложение матрицы A. Доказать, что для любой унитарной матрицы V справедливы неравенства

$$\|A - U\|_E \leq \|A - V\|_E \leq \|A + U\|_E.$$

Указать соответствующее свойство комплексных чисел.

71.28. Пусть A – матрица n-го порядка с сингулярными числами $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Положим

$$S(A) = \rho_1 + \ldots + \rho_n.$$

Доказать, что $S(A)$ является мультипликативной матричной нормой.

71.29. Доказать, что для любых неотрицательных матриц A и B и любых неотрицательных чисел α и β норма, определенная в предыдущей задаче, удовлетворяет равенству

$$S(\alpha A + \beta B) = \alpha S(A) + \beta S(B).$$

71.30. Показать, что в определении подчиненной нормы

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|}$$

знак точной верхней грани можно заменить на знак максимума.

71.30.1. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Доказать, что величина

$$\inf_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|}$$

равна нулю, если оператор $\mathcal{A}$ вырожден, и равна $1/\|\mathcal{A}^{-1}\|$, если оператор $\mathcal{A}$ обратим.

71.31. Пусть нормы $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ в пространствах $\mathcal{L}(V, W)$ и $\mathcal{L}(W, V)$ подчинены векторным нормам $\|\cdot\|_p$ в пространстве V относительно заданного базиса e и в пространстве W относительно заданного базиса f. Доказать, что:

а) $\|\mathcal{A}\|_1 = \|\mathcal{A}^*\|_\infty$, $\|\mathcal{A}\|_\infty = \|\mathcal{A}^*\|_1$;

б) $\|\mathcal{A}\|_p = \|\mathcal{A}^*\|_q$ при любом $p > 1$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

71.32. Пусть линейный функционал f в евклидовом (унитарном) пространстве V действует по правилу: $f(x) = (x, h)$, где $h \in V$ – заданный вектор. Доказать, что подчиненные нормы функционала f вычисляются по формулам:

а) $\|f\|_1 = \|h\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \|h\|_1$;

б) $\|f\|_p = \|h\|_q$ при любом $p > 1$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

71.33. В пространстве многочленов M_n нормы $\|\cdot\|_p$ введены относительно естественного базиса. Найти подчиненные нормы $\|f\|_p$ следующих линейных функционалов f в M_n:

а) $f(x) = x(0)$; б) $f(x) = x(1)$; в) $f(x) = x'(1)$;

г) $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$; д) $f(x) = \int_0^1 x(t)t\,dt$.

71.34. Вычислить евклидовы нормы функционалов из предыдущей задачи, если известно, что скалярное произведение в M_n задано стандартным образом.

71.35. Найти подчиненную норму $\|f\|_p$ линейного функционала $f(A) = \operatorname{tr} A$ в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$.

71.36. Найти следующие подчиненные нормы диагональной матрицы $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$: а) $\|A\|_1$; б) $\|A\|_\infty$; в) $\|A\|_p$,

$1 < p < \infty$.

71.37. Доказать, что при $n \geq 2$ для всякой матрицы $A = (a_{kj})$ n-го порядка справедливы:

а) равенство

$$\max_{1 \leq k,j \leq n} |a_{kj}| = \max_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1};$$

б) неравенство

$$\sum_{k,j=1}^{n} |a_{kj}| \geq \max_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_\infty}.$$

Можно ли в последнем соотношении заменить знак неравенства на знак равенства?

71.38. Нормы $m(\cdot)$ и $n(\cdot)$ линейного пространства V таковы, что для любого вектора x: $m(x) = cn(x)$, где c – фиксированное число. Показать, что соответствующие подчиненные нормы в $\mathcal{L}(V, V)$ совпадают.

71.39. Пусть $M(A)$ – норма матриц, подчиненная векторной норме $m(x)$. Найти матричную норму, подчиненную норме $n(x) = m(Px)$, где P – фиксированная невырожденная матрица.

71.40. Пусть A – матрица ранга 1, представленная в виде произведения $A = xy^H$, где x и y – n-мерные вектор-столбцы. Для любой нормы $m(x)$ арифметического пространства и соответствующей подчиненной нормы матриц $M(A)$ доказать равенство

$$M(A) = m(x)m^*(y),$$

где $m^*(y)$ – норма, двойственная к $m(x)$ относительно стандартного скалярного произведения.

71.41. Найти значение нормы $\|A\|_\infty$ на матрице ранга 1 с известным представлением $A = xy^H$.

71.42. Оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом (унитарном) пространстве V по правилу $\mathcal{A}x = (x, b)a$, где $a, b \in V$ – заданные векторы. Доказать, что для любой нормы $\|\cdot\|_V$ в пространстве V подчиненная ей норма оператора $\mathcal{A}$ может быть найдена из соотношения

$$\|\mathcal{A}\| = \|a\|_V \cdot \|b\|_V^*,$$

где $\|\cdot\|_V^*$ – норма, двойственная к норме $\|\cdot\|_V$ относительно скалярного произведения в V.

71.43. Пусть $L = \mathcal{L}(e)$ – подпространство евклидова (унитар-

ного) пространства V, натянутое на вектор e единичной длины. Пусть оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ранга 1 таков, что $\operatorname{im} \mathcal{A} = L$. Доказать, что для любой нормы $\|\cdot\|_p$ в пространстве V подчиненная ей норма оператора $\mathcal{A}$ может быть найдена из соотношения

$$\|\mathcal{A}\|_p = \|e\|_p \cdot \|\mathcal{A}^* e\|_q,$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ при $p > 1$, $q = \infty$ при $p = 1$ и $q = 1$ при $p = \infty$.

71.44. Пусть $n(\cdot)$ и $m(\cdot)$ – две заданные нормы в пространстве $\mathbb{C}^n$, а c_1 и c_2 – пара положительных констант, наилучших в соотношении их эквивалентности:

$$c_1 n(x) \leq m(x) \leq c_2 n(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Обозначим через $N(\cdot)$ и $M(\cdot)$ матричные нормы в $\mathbb{C}^{n\times n}$, подчиненные нормам $n(\cdot)$ и $m(\cdot)$ соответственно. Доказать, что выполнено соотношение

$$\frac{c_1}{c_2} N(A) \leq M(A) \leq \frac{c_2}{c_1} N(A), \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

причем константы $\dfrac{c_1}{c_2}$ и $\dfrac{c_2}{c_1}$ являются наилучшими.

71.45. Пусть $n(\cdot)$ и $m(\cdot)$ – две заданные нормы в пространстве $\mathbb{C}^n$, а $N(\cdot)$ и $M(\cdot)$ – соответствующие им подчиненные матричные нормы на $\mathbb{C}^{n\times n}$. Доказать, что равенство

$$N(A) = M(A)$$

выполнено для всех матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ тогда и только тогда, когда существует константа $c > 0$ такая, что

$$n(x) = cm(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

71.46. Доказать, что в обозначениях предыдущей задачи неравенство

$$N(A) \leq M(A)$$

для подчиненных матричных норм выполнено сразу для всех матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ в том и только том случае, когда

$$N(A) = M(A), \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

71.47. Доказать, что для подчиненной матричной нормы в $\mathbb{C}^{n\times n}$ справедливо представление

$$\|A\| = \max_{B\neq O} \frac{\|AB\|}{\|B\|}.$$

71.48. Доказать, что представление из предыдущей задачи остается в силе и в том случае, если максимум в правой части

берется не по всем ненулевым матрицам B, а только по матрицам B ранга 1.

71.49. Доказать, что для подчиненной матричной нормы в $\mathbb{C}^{n\times n}$ справедливо представление

$$\|A\| = \max_{B:\,\mathrm{rg}\,B=1} \frac{|\operatorname{tr}(AB)|}{\|B\|}.$$

71.50. Пусть $m(x)$ и $m^*(x)$ – двойственные нормы арифметического пространства, $M(A)$ и $M^*(A)$ – подчиненные им нормы матриц. Доказать, что для всякой матрицы A

$$M(A) = M^*(A^H).$$

Нормы и спектральный радиус матрицы

71.51. Доказать, что, какова бы ни была квадратная матрица A порядка n, любая ее мультипликативная матричная норма $\|A\|$ связана со спектральным радиусом $\rho(A) = \max\limits_k |\lambda_k|$ матрицы A (здесь $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ – собственные значения матрицы A) неравенством

$$\rho(A) \le \|A\|.$$

71.52. Показать, что для любой мультипликативной матричной нормы $\|A\|$ диагональной матрицы $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ имеет место неравенство $\|A\| \ge \max\limits_{1\le k\le n} |\lambda_k|$.

71.53. Показать, что если матрица A нормальна, то

$$\rho(A) = \|A\|_2.$$

71.54. Привести пример матрицы A, удовлетворяющей строгому неравенству $\rho(A) < \|A\|$ для каждой мультипликативной матричной нормы $\|\cdot\|$.

71.55. Указать круг на комплексной плоскости, который содержит все собственные значения матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1+2i \\ 0 & 2 & 1+i \\ 1+2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

71.56. Доказать, что все собственные значения матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

лежат в круге комплексной плоскости $|z| \leq 6$.

71.57. Доказать, что наибольшее и наименьшее собственные значения λ_1 и λ_4 симметрической матрицы

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 20 \end{bmatrix}$$

удовлетворяют неравенствам

$$20 \leq \lambda_1 \leq 23, \quad 0 < \lambda_4 \leq 6.$$

71.58. Доказать, что все собственные значения стохастической матрицы по модулю не превосходят единицы.

71.59. Доказать, что собственные значения трехдиагональной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

удовлетворяют неравенствам:

$$|\lambda| \leq \max_{1 \leq k \leq n} (|a_k| + |b_{k+1}| + |c_k|), \quad |\lambda| \leq \max_{1 \leq k \leq n} (|a_k| + |b_k| + |c_{k+1}|)$$

(здесь $b_1 = b_{n+1} = c_1 = c_{n+1} = 0$).

71.60. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и задано число $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует по крайней мере одна мультипликативная матричная норма $\|\cdot\|$, для которой имеют место оценки $\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$. Иными словами,

$$\rho(A) = \inf \|A\|,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным мультипликативным матричным нормам в $\mathbb{C}^{n \times n}$.

71.61. Показать, что

$$\rho(A) = \inf_T \|T^{-1}AT\|_2,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным невырожденным матрицам T.

71.62. Показать, что при $n \geq 2$ спектральный радиус $\rho(A)$ не является матричной нормой в $\mathbb{C}^{n\times n}$, поскольку:

а) $\exists A \neq O$: $\rho(A) = 0$;

б) $\exists A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\rho(A+B) > \rho(A) + \rho(B)$;

в) $\exists A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\rho(AB) > \rho(A)\rho(B) > 0$.

Привести соответствующие примеры матриц A и B.

Сходимость по матричной норме

71.63. Показать, что последовательность $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ матриц одинакового размера сходится по какой-либо норме к матрице $A = (a_{ij})$ тогда и только тогда, когда $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$ для всех i, j.

71.64. Показать, что пределом последовательности нормальных матриц может быть только нормальная матрица. Аналогично, последовательность унитарных матриц может сходится только к унитарной матрице, последовательность эрмитовых матриц – к эрмитовой матрице. Верно ли, что последовательность положительно определенных матриц может сходится только к положительно определенной матрице?

71.65. Пусть задана матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Если существует мультипликативная матричная норма $\|\cdot\|$, для которой $\|A\| < 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$, т.е. все элементы матрицы A^k стремятся к нулю при $k \to \infty$.

71.66. Матрицы A, для которых $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$, называют *сходящимися*. Доказать, что матрица A сходящаяся тогда и только тогда, когда ее спектральный радиус $\rho(A)$ меньше единицы.

71.67. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ показать, что

$$\rho(A^k) = [\rho(A)]^k.$$

Что происходит с элементами матрицы A^k и величинами $\|A^k\|_1$, $\|A^k\|_\infty$, $\|A^k\|_2$ при $k \to \infty$?

71.68. Пусть A – сходящаяся матрица и последовательность векторов $x^{(k)}$ задана рекуррентным соотношением $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$. Показать, что эта последовательность сходится к нулевому вектору независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$.

71.69. Пусть $\|\cdot\|$ – мультипликативная матричная норма в

$\mathbb{C}^{n\times n}$. Доказать, что для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ выполнено соотношение

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}.$$

71.70. Пусть $\|\cdot\|$ – мультипликативная матричная норма в $\mathbb{C}^{n\times n}$. Показать, что наряду с неравенством $\rho(A) \le \|A\|$ выполнены неравенства

$$\rho(A) \le \|A^k\|^{1/k}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Вывести отсюда и из предыдущей задачи, что

$$\rho(A) = \inf_{k\ge 1} \|A^k\|^{1/k}.$$

71.71. Доказать, что мультипликативная матричная норма $\|A\|$ матрицы A совпадает с ее спектральным радиусом:

$$\|A\| = \rho(A)$$

тогда и только тогда, когда для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\|A^k\| = \|A\|^k.$$

71.72. Пусть $\{A^{(k)}\} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ – заданная последовательность матриц. Показать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ сходится к некоторой матрице в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$, если найдется такая матричная норма $\|\cdot\|$ на $\mathbb{C}^{n\times n}$, что числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ сходится.

71.73. Показать, что степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, где $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, сходится, если существует такая мультипликативная матричная норма $\|\cdot\|$ на $\mathbb{C}^{n\times n}$, что числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|\|A\|^k$ сходится или хотя бы его частичные суммы образуют ограниченную последовательность.

71.74. Является ли сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|\|A\|^k$ необходимым условием сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$?

71.75. Пусть функция $f(z)$ определена степенным рядом $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ с радиусом сходимости $R > 0$, и пусть $\|\cdot\|$ – мультипликативная матричная норма на $\mathbb{C}^{n\times n}$. Показать, что

матричная функция

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{71.2}$$

корректно определена для всех матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, таких, что $\|A\| < R$. В более общей формулировке: показать, что равенство (71.2) корректно определяет матричную функцию $f(A)$ для всех тех матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, у которых спектральный радиус $\rho(A)$ удовлетворяет условию $\rho(A) < R$.

71.76. Доказать, что если матрица A диагонализуема и $A = S^{-1}\Lambda S$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то выполнено равенство

$$f(A) = S^{-1} f(\Lambda) S,$$

причем $f(\Lambda) = \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$.

71.77. Показать, что матричная экспонента, задаваемая степенным рядом

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

корректно определена для каждой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

71.78. Доказать, что для любых перестановочных матриц A и B выполнено равенство:

$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

71.79. Показать, что если $B = S^{-1}AS$, то выполнено соотношение $\exp(B) = S^{-1}\exp(A)S$. Вывести из этого соотношения, что матрица $\exp(A)$ всегда невырождена и выполнено равенство

$$\det[\exp(A)] = \exp(\operatorname{tr} A).$$

71.80. Доказать, что для любой унитарной матрицы U существует такая эрмитова матрица H, что

$$U = \exp(iH).$$

71.81. Выяснить, как можно было бы определить функции $\cos(A)$ и $\sin(A)$ и для каких матриц A это возможно.

71.82. Показать, что для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ выполнено равенство

$$\cos(A) + i\sin(A) = \exp(iA).$$

71.83. С помощью равенства предыдущей задачи показать, что

$$[\cos(A)]^2 + [\sin(A)]^2 = I.$$

71.84. Доказать, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ обратима, если существует такая мультипликативная матричная норма $\|\cdot\|$, что $\|I - A\| < 1$. Показать, что в этом случае выполнено равенство

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k.$$

71.85. Доказать, что если $\|\cdot\|$ – мультипликативная матричная норма и $\|A\| < 1$, то матрица $I - A$ обратима и

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

71.86. Пользуясь результатом предыдущей задачи, вычислить матрицу, обратную к матрице B, если:

а) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; в) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

71.87. Пусть $\|\cdot\|$ – мультипликативная матричная норма в $\mathbb{C}^{n\times n}$ и матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ такова, что для нее существует матрица $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ такая, что $\|BA - I\| < 1$. Показать, что обе матрицы A и B обратимы.

71.88. Пусть в $\mathbb{C}^{n\times n}$ задана мультипликативная матричная норма $\|\cdot\|$, обладающая свойством: $\|I\| = 1$. Доказать, что для матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, такой, что $\|A\| < 1$, справедливы неравенства

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \le \|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

71.89. Доказать, что если $\|\cdot\|$ – мультипликативная матричная норма в $\mathbb{C}^{n\times n}$ и матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ такова, что $\|A\| < 1$, то справедливы неравенства

$$\frac{\|I\|}{\|I\| + \|A\|} \le \|(I - A)^{-1}\| \le \frac{\|I\| - (\|I\| - 1)\|A\|}{1 - \|A\|}.$$

71.90. Пусть $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, причем матрица A обратима, а матрица $A + B$ вырождена. Показать, что справедливо неравенство $\|B\| \ge 1/\|A^{-1}\|$ с любой мультипликативной матричной нормой $\|\cdot\|$.

71.91. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и выполнены условия диагонального преобладания:

$$|a_{kk}| > \sum_{j\neq k} |a_{kj}|, \quad k = \overline{1,n}.$$

Доказать, что матрица A обратима.

71.92. Доказать, что если матрица $A = (a_{kj}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ нормальна, то выполнено неравенство

$$\|A\|_2 \geq \frac{1}{n}\left|\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\right|.$$

Сравнить этот результат с неравенством задачи 62.61.

Разные задачи

71.93. Пусть A – матрица порядка n с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Доказать следующее *неравенство Шура*:

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \|A\|_E^2.$$

71.94. Пусть в условиях предыдущей задачи $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ суть действительные и мнимые части собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Доказать, что:

а) $4\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \leq \|A + A^H\|_E^2$; б) $4\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \leq \|A - A^H\|_E^2$.

71.95. Доказать, что равенство в неравенстве Шура из задачи 71.93 достигается тогда и только тогда, когда A – нормальная матрица. Это же верно для обоих соотношений предыдущей задачи.

71.96. Пусть A – матрица порядка n с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и P – произвольная невырожденная матрица. Доказать, что

$$\inf_P \|P^{-1}AP\|_E^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2.$$

Для каких матриц A указанная нижняя грань достигается?

71.97. Используя задачу 71.95, доказать, что из нормальности матриц A, B и AB вытекает нормальность матрицы BA.

71.98. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения, а $\rho_1, \ldots, \rho_n$ – сингулярные числа матрицы A. Доказать, что

$$|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \leq \rho_1 + \ldots + \rho_n.$$

71.99. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что для всякой матрицы A порядка n выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq \sum_{k,j=1}^{n} |a_{kj}|.$$

71.100. Пусть ρ_n – минимальное сингулярное число квадратной матрицы A порядка n. Доказать, что расстояние (по спектральной норме) от матрицы A до множества всех вырожденных матриц равно ρ_n.

71.101. Найти наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ на единичной сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, если:

а) $f = x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \quad (n = 3)$;

б) $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4) + 6(x_2x_3 + x_2x_4) + 2x_3x_4$ quad $(n = 4)$;

в) $f = -2x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4) + 4(x_1x_3 + x_1x_4) + 2x_3x_4 \quad (n = 4)$.

71.102. Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный, а $\mathcal{B}$ – положительно определенный операторы, действующие в евклидовом (унитарном) пространстве V. Найти наименьшее и наибольшее значения величины $(\mathcal{A}x, x)$ при условии, что $(\mathcal{B}x, x) = 1$.

71.103. Найти наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ на эллипсонде $g(x_1, \ldots, x_n) = 1$, если:

а) $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3$, $g = 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 10(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ $(n = 3)$;

б) $f = -3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$, $g = 11x_1^2 + 11x_2^2 + 3x_3^2 + 14x_1x_2 + 10x_1x_3 + 10x_2x_3$ $(n = 3)$;

в) $f = -3x_2^2 + 7x_3^2 + 7x_4^2 + 6x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_1x_4 + 12x_2x_3 + 12x_2x_4 + 13x_3x_4$, $g = 5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 8(x_1x_2 - x_3x_4)$ $(n = 4)$.

§72. Нормы и операторные уравнения. Псевдорешения

Рассмотрим проблему решения систем линейных алгебраических уравнений с точки зрения свойств линейного оператора.

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пространства, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $u \in W$. Уравнение

$$\mathcal{A}z = u \tag{72.1}$$

называется *линейным операторным уравнением*, вектор u – *правой частью*, вектор z – *решением*. Очевидно, в матричной записи операторное уравнение превращается в систему линейных алгебраических уравнений и, следовательно, все свойства систем уравнений можно переносить на операторные уравнения и наоборот.

Однородное уравнение

$$\mathcal{A}^*w = \theta \tag{72.2}$$

называется *сопряженным* к уравнению (72.1).

Теорема 72.1 (альтернатива Фредгольма). *Либо операторное уравнение* (72.1) *имеет решение при любой правой части* $u \in W$, *либо сопряженное к нему уравнение* (72.2) *имеет нетривиальное решение.*

Альтернатива Фредгольма для оператора $\mathcal{A}$, действующего в одном пространстве V, означает, что либо основное уравнение имеет единственное решение при любом $u \in V$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.

Теорема 72.2 (теорема Фредгольма). *Операторное уравнение* (72.1) *имеет решение тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна всем решениям сопряженного уравнения* (72.2).

Пусть уравнение (72.1) разрешимо, и пусть H – множество всех его решений. *Нормальным решением* уравнения (72.1) называется такое его решение z_0, что

$$\|z_0\|_E = \inf_{z \in H} \|z\|_E.$$

Теорема 72.3. *Для любого разрешимого уравнения* (72.1) *нормальное решение* z_0 *существует и единственно, причем* z_0 – *перпендикуляр, опущенный из любого решения* z *уравнения* (72.1) *на* $\ker \mathcal{A}$.

Для уравнения (72.1) вектор $r = \mathcal{A}z - u$ называется *невязкой* вектора z, функция $F(z) = \|\mathcal{A}z - u\|_E^2$ – *функционалом невязки.*

Вектор $z^+ \in V$ называется *псевдорешением* уравнения (72.1), если

$$\|\mathcal{A}z^+ - u\|_E^2 = \inf_{z \in V} \|\mathcal{A}z - u\|_E^2. \tag{72.3}$$

Другими словами, псевдорешение – это вектор пространства V, минимизирующий функционал невязки.

Если уравнение (72.1) разрешимо, то псевдорешение совпадает с решением в обычном смысле.

Теорема 72.4. *Псевдорешение существует для любого операторного уравнения* (72.1).

Уравнение

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}z = \mathcal{A}^*u \tag{72.4}$$

называется *нормальным уравнением* для уравнения (72.1).

Теорема 72.5. *Вектор* z^+ *пространства* V *является псевдорешением уравнения* (72.1) *тогда и только тогда, когда* z^+ – *решение нормального уравнения* (72.4).

Псевдорешение наименьшей длины называется *нормальным псевдорешением.* Из теорем 72.3, 72.5 следует, что нормальное псевдорешение существует и единственно для любого уравнения (72.1).

Пример 72.1. Найти нормальное решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

относительно евклидовой нормы, соответствующей стандартному скалярному произведению в пространстве $\mathbb{R}^4$.

Решение. В силу теоремы 72.3 для нахождения нормального решения необходимо среди всех решений данной системы выбрать то, которое ортогонально ядру матрицы системы, т.е. ортогонально всем решениям приведенной однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \tag{72.5}$$

Это равносильно тому, что нормальное решение должно быть ортогонально какому-либо базису этого ядра, т.е. какой-либо фундаментальной системе решений (72.5).

Имеем

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{cc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 3 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

Фундаментальную систему решений (72.5) образуют векторы

$$e_1 = (3, -1, 1, 0)^T \quad , e_2 = (-3, 2, 0, 1)^T.$$

Таким образом, нормальное решение является единственным решением следующей системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ (x, e_1) = 0, \\ (x, e_2) = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & -11 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = -2. \end{cases}$$

Итак, нормальным решением является вектор $z_0 = (0, 1, 1, -2)^T$. ▪

Пример 72.2. Найти все псевдорешения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$ считается заданным стандартным образом.

Решение. Очевидно, что данная система несовместна. Выпишем матрицу системы A, столбец правых частей b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и построим соответствующую нормальную систему[2] $A^TAx = A^Tb$. Так как $A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$, то нормальная система имеет вид

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 15, \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 15, \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 15. \end{cases} \tag{72.6}$$

Решим нормальную систему:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 6 & 5 & 15 \\ 5 & 5 & 5 & 15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда решением нормальной системы (72.6), а следовательно, псевдорешением исходной системы является любой вектор $(x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

т.е. вектор вида $(\alpha, \alpha, 3 - 2\alpha)^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ▪

Пример 72.3. Найти все псевдорешения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$ считается заданным стандартным образом.

Решение. Отметим сначала, что данная система получена из несовместной системы предыдущего примера элементарным преобразованием второго уравнения – делением его обеих частей на число 2.

Аналогично предыдущей задаче:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^Tb = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Нормальная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9/2, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, псевдорешением является любой вектор вида $(\alpha, \alpha, 9/2 - 2\alpha)^T$,$\alpha \in \mathbb{R}$.

---

[2]Отметим, что, так как скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ считается заданным стандартным образом, сопряженным оператором $\mathcal{A}^*$ к оператору $\mathcal{A}$, заданному в естественном базисе матрицей A, является оператор, заданный матрицей A^T.

Следует обратить внимание, на то, что, несмотря на «близость» данной системы и системы из предыдущей задачи, множества их псевдорешений различны. ▪

Пример 72.4. Найти нормальное псевдорешение системы из примера 72.2.

Решение. Нормальное псевдорешение этой системы является нормальным решением соответствующей нормальной системы (72.6).

Фундаментальную систему решений соответствующей приведенной однородной системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

составляет единственный вектор $e_1 = (1, 1, -2)^T$. Поэтому нормальное решение системы (72.6) находится из системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 6 & 5 & 15 \\ 5 & 5 & 5 & 15 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

Таким образом, вектор $z_0^+ = (1, 1, 1)^T$ – нормальное псевдорешение исходной системы. ▪

Понятие псевдорешения можно эффективно использовать в так называемой *задаче о наименьших квадратах.*

Назовем *средним квадратическим отклонением* функции $y = f(x)$ от заданной системы точек $M_1(x_1, y_1), \ldots, M_k(x_k, y_k)$ величину

$$\delta = \left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\big(y_i - f(x_i)\big)^2\right]^{1/2}. \tag{72.7}$$

Задача о наименьших квадратах состоит в нахождении функции $y = f(x)$ из определенного класса, для которой величина среднего квадратического отклонения (72.7) минимальна[3].

Пример 72.5. Найти линейную функцию $f(x) = a_2x + a_1$, наименее отклоняющуюся от точек $M_1(0, 0)$, $M_2(-1, 0)$, $M_3(1, 2)$, $M_4(2, 1)$ в смысле среднего квадратического отклонения.

Решение. Составим векторы $f = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))^T$ значений искомой линейной функции $f(x)$ в заданных точках и $b = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ ординат заданных точек:

$$f = (a_1, a_1 - a_2, a_1 + a_2, a_1 + 2a_2)^T, \quad b = (0, 0, 2, 1)^T.$$

Величина среднего квадратического отклонения (72.7) в данном случае равна $\delta = \|b - f\|_E/2$, где $\|\cdot\|_E$ – обычная евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^4$. Величина δ будет минимальна тогда и только тогда, когда минимальна

[3]Аналогичную задачу можно ставить и для функций $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ любого числа переменных.

евклидова норма разности векторов b и f. Очевидно, что величина $\|b-f\|_E^2$ является функционалом невязки для системы

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_1 - a_2 = 0, \\ a_1 + a_2 = 2, \\ a_1 + 2a_2 = 1, \end{cases} \tag{72.8}$$

и поэтому коэффициенты a_1, a_2 искомой линейной функции $f(x)$ являются псевдорешением системы (72.8).

Составим для системы (72.8) нормальную систему. Так как

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^Tb = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

то нормальная система имеет вид

$$A^TA \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = A^Tb \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4a_1 + 2a_2 = 3, \\ 2a_1 + 6a_2 = 4. \end{cases}$$

Отсюда $a_1 = a_2 = 1/2$, и искомая линейная функция имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Так как $f = (1/2, 0, -1, 1/2)^T$, то среднее квадратическое отклонение найденной функции от точек M_1, M_2, M_3, M_4 равно $\delta_{\min} = \sqrt{6}/4$. ▪

ЗАДАЧИ

Нормальное решение

Найти нормальные решения следующих систем.

72.1. $\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 - x_4 + 17x_6 = 0, \\ 31x_1 + 15x_3 - 11x_4 - 3x_5 = 0, \\ 17x_2 - x_3 + 7x_5 - 23x_6 = 0. \end{cases}$

72.2. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

72.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ **72.4.** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

72.5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 = 10. \end{cases}$

72.6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 10, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 12x_4 = -30. \end{cases}$

Исследовать на экстремум функцию $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ при указанных условиях.

72.7. $y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, если $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

72.8. $y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, если $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

72.9. $y = 4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2$, если $4x_1 - x_2 + x_3 = 23$.

72.10. $y = -x_1^2 - 9x_2^2 - x_3^2 - 4x_4^2$, если $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_3 - 6x_4 = -3. \end{cases}$

72.10.1. $y = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, если $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

72.10.2. $y = x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, если $x_1 - 2x_2 + x_3 = 13$.

72.10.3. $y = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$, если $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 8, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

72.11. Найти максимальное значение выражения $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ для каждого из следующих условий:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k = a$; в) $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k x_k = a$ $(q \neq \pm 1)$.

При каких значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$ этот максимум достигается?

72.12. Найти максимальное значение выражения $\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k^2$ при выполнении условия $\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k = a$. При каких значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$ этот максимум достигается?

Теоремы Фредгольма

72.13. Доказать, что в евклидовом (унитарном) пространстве V система уравнений

$$(x, e_1) = \alpha_1, \ldots, (x, e_k) = \alpha_k \qquad (72.9)$$

имеет решение при любых числах $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ тогда и только тогда, когда векторы $e_1, \ldots, e_k$ линейно независимы.

72.14. Доказать, что система уравнений (72.9) разрешима тогда и только тогда, когда имеет место импликация:

$$\forall \beta_1, \ldots, \beta_k : \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i = \theta \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i = 0.$$

72.15. Доказать, что система уравнений

$$f_1(x) = \alpha_1, \ \ldots, \ f_k(x) = \alpha_k,$$

где $f_1, \ldots, f_k$ – линейные функционалы в линейном пространстве V, имеет решение при любых числах $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ тогда и только тогда, когда функционалы $f_1, \ldots, f_k$ линейно независимы.

72.16. Пусть A_1, A_2 – матрицы размеров $m_1 \times n$ и $m_2 \times n$, а b_1, b_2 – вектор-столбцы высот m_1 и m_2 соответственно. Доказать, что система уравнений

$$A_1 x = b_1, \quad A_2 x = b_2$$

имеет решение при любых правых частях тогда и только тогда, когда равенство $A_1^T y = A_2^T z$ возможно лишь для нулевых вектор-столбцов y и z высот m_1 и m_2 соответственно.

72.17. Для уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ в геометрическом пространстве V_3 найти условия:

а) его разрешимости при любой правой части $\mathbf{b}$;

б) его разрешимости для данной правой части $\mathbf{b}$.

72.18. Найти условия разрешимости системы уравнений

$$[\mathbf{x}, \mathbf{a}_1] = \mathbf{b}_1, \quad [\mathbf{x}, \mathbf{a}_2] = \mathbf{b}_2.$$

Псевдорешения

72.19. Пусть g – ортогональная проекция вектора u на образ $\operatorname{im} \mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$. Доказать, что всякое псевдорешение уравнения $\mathcal{A}z = u$ есть прообраз вектора g.

72.20. Показать, что множество всех псевдорешений уравнения $\mathcal{A}z = u$ есть многообразие, направляющее подпространство которого – ядро $\ker \mathcal{A}$. Это многообразие является подпространством тогда и только тогда, когда u принадлежит ядру $\ker \mathcal{A}^*$ сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.

72.21. Показать, что нормальное псевдорешение уравнения $\mathcal{A}z = u$ можно определить как псевдорешение этого уравнения, ортогональное к ядру оператора $\mathcal{A}$, или, что все равно, как псевдорешение, принадлежащее образу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.

72.22. Пусть $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования в пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением, $g(t)$ – заданный многочлен из M_n. Найти все псевдорешения и нормальное псевдорешение уравнения $\mathcal{D}f = g$.

72.23. Как связаны между собой псевдорешения и нормальные псевдорешения уравнения $\mathcal{A}z = u$ и уравнений: а) $\alpha\mathcal{A}z = u$; б) $\mathcal{A}z = \alpha u$; в) $\alpha\mathcal{A}z = \alpha u$, где α – число, отличное от нуля?

72.24. Как связаны между собой нормальные псевдорешения уравнения $\mathcal{A}z = u$ и уравнений: а) $\mathcal{V}\mathcal{A}z = \mathcal{V}u$; б) $\mathcal{A}\mathcal{U}z = u$? Здесь $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – унитарные операторы.

72.25. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор и пусть известен ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, составленный из собственных векторов этого оператора. Как найти псевдорешение и нормальное псевдорешение уравнения $\mathcal{A}z = u$?

72.26. Пусть $\mathcal{A}$ – оператор ранга r, действующий из n-мерного пространства V в m-мерное пространство W. Известен ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и соответствующие собственные значения $\rho_1^2, \ldots, \rho_n^2$ ($\rho_i > 0$, $i = \overline{1,r}$). Доказать, что:

а) псевдорешения уравнения $\mathcal{A}z = u$ описываются формулой

$$z^+ = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_r e_r + \gamma_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \gamma_n e_n,$$

где

$$\beta_i = \frac{(u, \mathcal{A}e_i)}{(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_i)} = \frac{(\mathcal{A}^*u, e_i)}{\rho_i^2}, \quad i = \overline{1,r},$$

а $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ – произвольные числа;

б) нормальное псевдорешение есть вектор

$$z_0^+ = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_r e_r.$$

72.27. Для оператора $\mathcal{A}$ предыдущей задачи известен ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_m$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ (при этом $\rho_i > 0$, $i = \overline{1,r}$). Доказать, что нормальное псевдорешение уравнения $\mathcal{A}z = u$ можно найти по формуле

$$z_0 = \xi_1 \mathcal{A}^* f_1 + \ldots + \xi_r \mathcal{A}^* f_r,$$

где

$$\xi_i = \frac{(u, f_i)}{\rho_i^2}, \quad i = \overline{1,r}.$$

Найти нормальные псевдорешения следующих систем линейных уравнений, считая, что скалярные произведения в соответствующих арифметических пространствах введены стандартным образом.

72.28. $\begin{cases} 29x_1 + 37x_2 + 46x_3 = 0, \\ 51x_1 - 17x_2 + 73x_3 = 0. \end{cases}$ **72.29.** $\begin{cases} 27x_1 - 55x_2 = 1, \\ -13x_1 + 27x_2 = 1, \\ -14x_1 + 28x_2 = 1. \end{cases}$

72.30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$ **72.31.** $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

72.32. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 = 0. \end{cases}$ **72.33.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

72.34. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + (1+\varepsilon)x_2 + x_3 = 0, \ (\varepsilon \neq 0), \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

72.35. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + (2+\varepsilon)x_3 = 1, \ (\varepsilon \neq 0). \end{cases}$ **72.36.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1, \\ -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

72.37. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1, \\ x_1 - 2x_2 = -1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$ **72.38.** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_4 = 2, \\ 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 3, \\ 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_4 = -2, \\ 2x_2 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

72.39. Найти нормальное псевдорешение в пространстве M_3 со стандартным скалярным произведением уравнения:

а) $f(t-1) + f(1-t) = t$; б) $f(t-1) - f(1-t) = 1$.

72.40. Доказать, что для любой квадратной матрицы A порядка n нормальным псевдорешением уравнения $AX - XA = I$ в пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением является нулевая матрица.

Метод наименьших квадратов

72.41. Найти функцию f, наименее отклоняющуюся от заданных точек M_i, $i = \overline{1,k}$, в смысле среднего квадратического отклонения, если:

а) $y = f(x)$ – линейная функция: $f(x) = a_2x + a_1$ и точ-

ки заданы координатами: $M_1(1,1)$, $M_2(0,2)$, $M_3(2,0)$, $M_4(0,1)$, $M_5(0,-1)$;

б) $y = f(x)$ – квадратичная функция: $f(x) = a_3x^2 + a_2x + a_1$ и точки заданы координатами: $M_1(0,0)$, $M_2(-1,0)$, $M_3(1,2)$, $M_4(2,1)$;

в) $y = f(x)$ – квадратичная функция: $f(x) = x^2 + a_2x + a_1$ и точки заданы координатами: $M_1(0,1)$, $M_2(1,1)$, $M_3(2,1)$;

г) $z = f(x,y)$ – линейная функция: $f(x,y) = a_1x + a_2y + a_3$ и точки заданы координатами: $M_1(1,1,1)$, $M_2(1,2,2)$, $M_3(2,1,0)$, $M_4(0,1,1)$;

д) $z = f(x,y)$ – линейная функция: $f(x,y) = a_1x + a_2y + a_3$ и точки заданы координатами: $M_1(0,0,0)$, $M_2(1,1,1)$, $M_3(1,0,1)$, $M_4(0,1,1)$, $M_5(1,1,0)$.

Каково будет наименьшее среднее квадратическое отклонение в каждом из этих случаев?

Ответы и указания

§44

44.3. Указание. Доказать, что $0 \cdot x = \theta$, откуда вывести, что $(-1) \cdot x = -x$. Затем воспользоваться ассоциативностью сложения.

44.4. Указание. Положить: а) $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, 0)$; б) $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, a_2)$.

44.6. Указание. Положить: $\lambda(a_1, a_2) = (\operatorname{Re} \lambda a_1, \operatorname{Re} \lambda a_2)$.

44.8. Указание. Не доказана сюръективность умножения на число.

44.10. Указание. Рассмотреть отображение $\varphi(f) = \ln f(x)$.

44.11. Указание. в,г) Воспользоваться индукцией по n.

44.12. в) Содержит p^n векторов, размерность равна n.

44.14. Указание. Показать, что если числа $\alpha_i \in P$, $i \in \mathbb{N}$, различны и вектор $a \in V$ ненулевой, то векторы $\alpha_i a$ также различны.

44.15. Нет. Указание. Рассмотреть порядки элементов аддитивной группы векторов пространства.

44.16. Указание. Если $x \in X_i$, но $x \notin X_j$ для всех $j \neq i$, то x не содержится ни в какой линейной комбинации подмножеств X_j, $j \neq i$.

44.17. Указание. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для каждого подмножества $X \subset M$ положить $\varphi(X) = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = 1$, если $x_i \in X$, и $a_i = 0$ в противном случае.

44.18. а) Неколлинеарны; б) коллинеарны. Обе пары не коллинеарны как векторы вещественных пространств.

44.20. а) Линейно зависима; б) линейно независима. Обе системы линейно независимы как системы векторов вещественных пространств.

44.21. а) Линейно независима; б) линейно зависима. Обе системы линейно независимы как системы векторов вещественных пространств.

44.24. 2 в обоих случаях. **44.25.** 2 в обоих случаях.

44.26. 4 в обоих случаях. **44.27.** 3 в обоих случаях.

44.28. 3 в обоих случаях. **44.29.** 4 в обоих случаях.

44.30. 2 – в комплексном пространстве, 3 – в вещественном.

44.31. 4 в обоих случаях. **44.32.** 5 в обоих случаях.

44.33. 5 в обоих случаях.

44.34. 2 – в комплексном пространстве, 3 – в вещественном.

44.35. 2 в обоих случаях.

44.36. 2 – в комплексном пространстве, 4 – в вещественном.

44.37. 1 – в комплексном пространстве, 2 – в вещественном.

44.38. Нет, не существует.

44.39. Указание. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ – база, а $a_{r+i} = \alpha_{i1} a_1 + \alpha_{i2} a_2 + \ldots + \alpha_{ir} a_r$, $i = \overline{1, r+1}$. Рассмотреть матрицу $(\operatorname{Im} \alpha_{ij})$, $i = \overline{1, r+1}$, $j = \overline{1, r}$, и показать, что один из векторов $a_{r+1}, \ldots, a_{2r+1}$ представим в виде линейной комбинации остальных с вещественными коэффициентами.

44.40. Ранг равен 2, база – например, x_1, x_2.

44.41. Ранг равен 3, база – например, x_1, x_2, x_4.

44.42. Ранг равен 3, база – например, $p_1(t), p_3(t), p_4(t)$.

44.43. Ранг равен 2, база – например, $p_1(t), p_2(t)$.

44.44. Ранг равен 2, база – например, A, A^T.

44.45. Ранг равен 5, база – например, A, B, B^T, AB^T, B^TB.

44.46. Указание. Если $x_l = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r$, то в качестве вектора x_j можно взять любой вектор, у которого коэффициент α_j в этом разложении отличен от нуля.

44.47. а) В системе ровно r векторов отличны от нуля; б) в системе ровно $r+1$ векторов отличны от нуля, причем два из них коллинеарны; в) либо в системе $r+2$ вектора отличны от нуля, причем три из них коллинеарны, либо в системе отличны от нуля $r+1$ векторов и существует тройка линейно зависимых векторов, в которой никакие два не коллинеарны.

44.48. x_1, x_2; x_1, x_4; x_2, x_3; x_3, x_4. **44.49.** Любые два вектора.

44.50. а) x_1, x_2; x_2, x_3; x_2, x_4; б) x_1, x_2, x_3; x_1, x_2, x_4; x_2, x_3, x_4.

44.51. Да. **44.53.** Указание. Рассмотреть базу системы.

44.54. Нет, нельзя. **44.62.** Нет. **44.65.** Нет, нельзя.

44.66. $x_e = (1/3, 1/3, 1/3)^T$. **44.67.** $x_e = (1+i, -1, 1-i)^T$.

44.68. $x_e = (0, 2, 1, 2)^T$. **44.69.** $x_e = (6, 5, -7, -3)^T$.

44.72. а) $(1, -1, -1, 1, -1, 1)^T$; б) $(1, -1, -1, 2, -1, 1)^T$.

44.73. $(4, 2, -3)^T$. **44.74.** $x = e_1 - e_2$.

44.75. Указание. Рассмотреть матрицы $E_1 + E_2 + E_3$, $E_1 + E_2 + E_4$, $E_1 + E_3 + E_4$, $E_2 + E_3 + E_4$.

44.76. $(-1, 2, -1, 1)^T$. **44.77.** а) $(1, -1, 1, i)$; б) $(1, 1, -1, 0)$.

44.78. $(1, 1, -1, 1, 1, 1)^T$. **44.79.** $(x_1', x_2')^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (x_1, x_2)^T$.

44.80. $(x_1', x_2', x_3')^T = \begin{bmatrix} i & -1-i & 1-i \\ 1-i & i & -1-i \\ -1-i & 1-i & i \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T$.

44.81. $\left(f(c), f'(c), \dfrac{f''(c)}{2!}, \ldots, \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$.

44.82.
$$\begin{bmatrix} 1 & -c & c^2 & -c^3 & \ldots & (-c)^n \\ 0 & 1 & -cC_2^1 & c^2C_3^1 & \ldots & (-c)^{n-1}C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & -cC_3^2 & \ldots & (-c)^{n-2}C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & (-c)^{n-3}C_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

44.83. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $(x_1', \ldots, x_6')^T = Q(x_1, \ldots, x_6)^T$.

44.84. $(x_1', x_2', x_3')^T = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 4 \\ -3 & -2 & -2 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T$.

44.85. $(x_1', x_2', x_3', x_4')^T = \begin{bmatrix} 0 & -18 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$.

44.86. $(x_1', x_2', x_3')^T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T$.

44.87. а) Поменяются местами i-я и j-я строки; б) поменяются местами i-й и j-й столбцы; в) все строки, а затем все столбцы запишутся в обратном порядке.

44.88. а) S^{-1}; б) SQ^{-1}.

44.89. а) Каждый вектор f_i коллинеарен e_i, $i = \overline{1,n}$; б) $f_i = \alpha e_i$, $i = \overline{1,n}$; в) каждый вектор f_i линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_i$; г) каждый вектор f_i линейно выражается через $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n$.

44.90. Указание. Так как $e_1, e_2, \ldots, e_m$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_m e_m = \theta$. Пусть $\beta_1 \neq 0$. Тогда, так как $e_2, \ldots, e_m$ также линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $\gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_m e_m = \theta$. Пусть $\beta = \sum_{i=1}^{m} \beta_i$ и $\gamma = \sum_{i=2}^{m} \gamma_i$ отличны от нуля. Тогда линейная комбинация $\gamma(\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_m e_m) - \beta(\gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_m e_m)$ – искомая.

44.91.1. Указание. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ – некоторый базис в V и x_f – координатный столбец вектора x в этом базисе. Учесть, что если Q – матрица перехода от базиса f к искомому, то $x_f = Qa$.

44.92. Указание. Пусть Q – матрица перехода от f к e. Так как она невырождена, то среди миноров k-го порядка, стоящих в первых k столбцах, обязательно есть ненулевой. Номера строк, в которых он находится, и определяют требуемый набор векторов из базиса f. Чтобы убедиться в этом, достаточно составить матрицу перехода от f к вновь построенному базису.

44.93. Нет, не обязательно. Можно, например, взять векторы $f_1 = e_1 - e_2$ и $f_2 = e_2 - e_3 - e_1$. Тогда $f_1 + f_2 + e_3 = \theta$.

44.94. а) q^n; б),в) $(q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-1})$.

§45

45.2. $(1,0,0,\ldots,0,1)$, $(0,1,0,\ldots,0,0)$, …, $(0,0,0,\ldots,1,0)$; размерность равна $n-1$.

45.3. $(1,0,0,0,\ldots)$, $(0,0,1,0,\ldots)$, …; размерность равна $[\frac{n+1}{2}]$.

45.4. $(0,1,0,1,0,\ldots)$, $(1,0,0,0,0,\ldots)$, $(0,0,1,0,0,\ldots)$, …; размерность равна $[\frac{n+1}{2}] + 1$.

45.5. $(1,0,1,0,\ldots)$, $(0,1,0,1,\ldots)$; размерность равна 2.

45.6. Базис образуют, например, матрицы F_{ij} $(i \leq j,\ i,j = \overline{1,n})$, у которых элементы $f_{ij} = f_{ji} = 1$, а все остальные элементы равны 0; размерность равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

45.7. Базис образуют, например, матрицы G_{ij} $(i < j,\ i,j = \overline{1,n})$, у которых элементы $g_{ij} = -g_{ji} = 1$, а все остальные элементы равны 0; размерность равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Указание. В случае "б)" подпространства симметрических и кососимметрических матриц в $P^{n\times n}$ совпадают.

45.8. Размерность равна 2; базис образуют матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

45.10. $1, t^2, t^4, \ldots$; размерность равна $[\frac{n+2}{2}]$.

45.11. $t, t^3, t^5, \ldots$; размерность равна $[\frac{n+1}{2}]$.

45.12. $t-a, (t-a)t, (t-a)t^2, \ldots, (t-a)t^{n-1}$; размерность равна n.

45.13. $(t-a)(t-\bar{a}), (t-a)(t-\bar{a})t, (t-a)(t-\bar{a})t^2, \ldots, (t-a)(t-\bar{a})t^{n-2}$; размерность равна $n-1$.

45.14. При $k \le n$: $(t-a_1)\ldots(t-a_k), (t-a_1)\ldots(t-a_k)t, \ldots, (t-a_1)\ldots(t-a_k)t^{n-k}$, размерность равна $n+1-k$. При $k > n$ – это нулевое подпространство.

45.15. C_{k+n-1}^{n-1}. Указание. Взять за базу все одночлены и каждому одночлену вида $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ поставить в соответствие строку

$$\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1 \text{ раз}}x_1\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_2 \text{ раз}}x_2\ldots\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_n \text{ раз}}x_n.$$

45.16. а) Размерность равна 0;
б) размерность равна 1, базис $(1+3i, -2)$;
в) размерность равна 1, базис $(1,1,1)$;
г) размерность равна 2, базис $(1-i, -1, 0), (2+i, 0, -1)$;
д) размерность равна 2, базис $(-1, i, 1, 0), (1+i, 1, 0, -1)$.

45.17. Размерность равна 3; базис образуют, например, a_1, a_2, a_4.

45.18. Размерность равна 3; базис образуют, например, a_1, a_2, a_5.

45.19. Размерность равна 3; базис образуют, например, f_1, f_2, f_3.

45.20. Размерность равна 2; базис образуют, например, c_1, c_2.

45.21. Размерность равна 1; базис образует, например, c_1.

45.22. Размерность равна 2; базис образуют, например, c_1, c_2.

45.23. Размерность равна 3; базис образуют, например, c_1, c_2, c_3.

45.24. Размерность равна 2; базис образуют, например, A_1, A_2.

45.26. $(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-k+1})/b$, где $b = (q^k-1)(q^k-q)\ldots(q^k-q^{k-1})$ – число различных базисов в k-мерном подпространстве.

45.27. Например, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

45.28. Например, $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_5 = 0$.

45.29. Например, $(3-3i)x_1 - 2x_2 = 0$.

45.30. Например, $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $(1-i)x_1 - x_4 = 0$.

45.31. Например, $(6-5i)x_1 - 3x_3 - (4-i)x_4 = 0$, $5x_1 - (8+7i)x_2 + (1+7i)x_3 = 0$.

45.33. Указание. Произвольный базис подпространства L дополнить до базиса пространства V. Затем элементарными преобразованиями получить базис, удовлетворяющий условию.

45.34. Да. Нет.

45.36. Указание. При доказательстве необходимости использовать равенство $B_e = CA_e$, где C – невырожденная матрица, составленная из коэффициентов разложения второй системы через первую. При доказательстве достаточности приписать к матрице A_e снизу строку координат вектора b_i и показать, что ранг полученной матрицы равен r.

45.39. Размерность $L_1 + L_2$ равна 3, базис – например, a_1, a_2, a_3.

45.40. Размерность $L_1 + L_2$ равна 4, базис – например, a_1, a_2, a_3, b_1.

45.41. Размерность $L_1 + L_2$ равна 3, базис – например, a_1, a_2, b_1.

45.42. Размерность $L_1 + L_2$ равна 3, базис – например, a_1, a_2, b_1.

45.45.1. Указание. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V. Рассмотрим для $\forall \alpha \in P, \alpha \neq 0$, вектор $x_\alpha = \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \ldots + \alpha^n e_n$. Так как для любого набора попарно различных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ $(l \le n)$ векторы $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}$ линейно независимы, то в L_j может содержаться не более, чем $\dim L_j$, векторов x_α, $\alpha \in P$.

45.48. Указание. Рассмотреть пространство $\mathbb{Z}_2^2$.

45.49. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 1, базис – например, $c_1 = (3,5,7)$.

45.50. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 2, базис – например, $c_1 = (-1,2,0,2)$, $c_2 = (1,2,1,1)$.

45.51. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 2, базис – например, $c_1 = (1,2,2,1)$, $c_2 = (1,1,1,1)$.

45.52. И в вещественном, и в комплексном случаях: $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, базис суммы – например, a_1, a_2, b_2, базис пересечения – $c_1 = (0,4,3-i)$.

45.53. В комплексном случае: $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, базис суммы – например, a_1, a_2, a_4, b_4, базис пересечения – $c_1 = (0,1,0,0)$, $c_2 = (0,0,0,1)$. В вещественном случае: $\dim(L_1 + L_2) = 6$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, базис суммы – например, $a_1, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$, базис пересечения – $c_1 = (0,1,0,2-i)$.

45.54. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 1, базис – например, $c_1 = (3,5,1)$.

45.55. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 2, базис – например, a_1, a_3.

45.56. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 2, базис – например, $c_1 = (1,1,1,1,1)$, $c_2 = (0,2,3,1,-1)$.

45.57. В вещественном случае: $\dim(L_1 + L_2) = 6$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$, базис суммы – например, a_1, a_3, $b_1 = (i,0,-3)$, $b_2 = (1,0,3i)$, $b_3 = (0,-i,1-2i)$, $b_4 = (0,1,2+i)$. В комплексном случае: $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, базис суммы – например, a_1, a_3, b_1, базис пересечения – $c_1 = (-10+9i, 16+2i, 3-10i)$.

45.58. Например, базис суммы – $a_1 = (1,1,0,0,-1)$, $a_2 = (0,1,1,0,1)$, $a_3 = (0,0,1,1,1)$, $a_4 = (1,0,1,0,1)$, базис пересечения – $c_1 = (1,1,1,1,0)$, $c_2 = (1,0,0,1,-1)$.

45.59. Например, базис суммы – $a_1 = (1,0,0,1)$, $a_2 = (0,1,0,0)$, $a_3 = (0,0,-1,1)$, базис пересечения – $c_1 = (2,3,1,1)$.

45.60. Например, базис суммы – $a_1 = (1,0,1,0)$, $a_2 = (0,1,0,1)$, $a_3 = (0,0,1,0)$, базис пересечения – a_1, a_2.

45.61. Размерность суммы равна 5, размерность пересечения равна 2, базис суммы – например, A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, базис пересечения – например, A_1, B_4.

45.62. Размерность суммы равна 3, размерность пересечения равна 1, базис суммы – например, $1 + 2t + t^3$, $1 + t^2$, $1 + t + t^2$, базис пересечения – например, $2 + 3t + t^2 + t^3$.

45.65. Указание. Учесть, что $\dim(V_1 + V_2) = \dim(W_1 + W_2) = \operatorname{rg}(A_1 + A_2)$.

45.68. Например, $x = (-1,-2,-3) + (2,2,4)$ и $x = (2,3,4) + (-1,-3,-3)$.

45.70. Проекция вектора e_i на L_1 параллельно L_2 имеет i-ю координату $(n-1)/n$, а остальные координаты, равные $-1/n$, проекция на L_2 параллельно L_1 имеет все координаты, равные $1/n$.

45.71. В матрице A_1: $\{A_1\}_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$, остальные элементы равны $1/2$; в матрице A_2: $\{A_2\}_{ij} = -\{A_2\}_{ji} = 1/2$, $i < j$, $i,j = \overline{1,n}$, все диагональные элементы равны 0.

45.72. $x = (-1,-2,-6,-3) + (3,2,6,6)$.

45.74. а) $2t^3 - 3t^2 + 1$; б) $t^3 - t + 1$; в) $3(t^3 - t)/2$.

45.75. а) $(-1, 2i)$; б) $(0,0)$; в) $(27 + 6i, 12 - 54i)$.

45.77. В качестве дополнительных подпространств можно взять, например, линейные оболочки, натянутые на векторы $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$ и $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

45.78. В качестве дополнительных подпространств можно взять, например, подпространство M_0 и линейную оболочку, натянутую на многочлен t^n.

45.79. В качестве дополнительных подпространств можно взять, например, подпространство всех симметрических матриц и подпространство всех верхних треугольных матриц.

45.81. $\dfrac{(k^n-k^m)(k^n-k^{m+1})\dots(k^n-k^{n-1})}{(k^m-1)(k^m-k^2)\dots(k^m-k^{m-1})}$.

45.82. Пользуясь задачей 45.45.1, показать, что если $\dim L_1 = \dots = \dim L_p = k < \dim V$, то существует вектор $e \in V$, не лежащий ни в одном из подпространств L_j. Далее применить индукцию по k.

§46

46.1. Вектор. **46.2.** Все пространство V.

46.5. Нет, неверно. Если характеристика поля равна двум, то для любого $a \in V$ выполнено $a+a=\theta$, и следовательно, $\forall x,y \in L : (a+x)+(a+y) = x+y \in L$.

46.6. Может, например, если H – это линейное многообразие в линейном подпространстве над полем $\mathbb{Z}_2$.

46.7. Вектор сдвига $(1,0,1,0)$, направляющее подпространство натянуто на вектор $(1,1,3,2)$.

46.8. Вектор сдвига $(1,2,0,0)$, направляющее подпространство натянуто на векторы $(3,1,0,1)$, $(1,-2,1,0)$.

46.9. В комплексном случае: вектор сдвига $(0,i,-1)$, направляющее подпространство двумерно и натянуто на векторы $(1,i,0)$, $(2i,1,1+i)$. В вещественном случае: вектор сдвига $(0,i,-1)$, направляющее подпространство четырехмерно и натянуто на векторы $(1,i,0)$, $(i,-1,0)$, $(2i,1,1+i)$, $(-2,i,-1+i)$.

46.10. В комплексном случае: вектор сдвига $(i,2,1+i,1-i)$, направляющее подпространство одномерно и натянуто на вектор $(0,-i,1,0)$. В вещественном случае: вектор сдвига $(i,2,1+i,1-i)$, направляющее подпространство двумерно и натянуто на векторы $(0,-i,1,0)$ и $(0,1,i,0)$.

46.11. Если $\lambda = 1$, то вектор сдвига $(-2,0,0)$, направляющее подпространство натянуто на векторы $(2,0,1)$, $(-i,1,0)$. Если $\lambda \neq 1$, то вектор сдвига $(-2,-2i,1)$, направляющее подпространство натянуто на вектор $(-2,-2i-2i\lambda,1)$.

46.12. Если $\lambda = 2$, то вектор сдвига $(2-i,0,0,i)$, направляющее подпространство натянуто на векторы $(1,-1,0,1)$, $(-5,3,1,0)$. Если $\lambda \neq 2$, то вектор сдвига $(\lambda+1-2i, i-1, 0, 1)$, направляющее подпространство натянуто на вектор $(-5,3,1,0)$.

46.14. Все являются гиперплоскостями в M_n.

46.15. а) n^2-1; б) $n(n-\operatorname{rg}A)$; в) $n(n-\operatorname{rg}A)$; г) $n^2-\operatorname{rg}A\operatorname{rg}B$; д) 2; е) 2. Указание. г) Воспользоваться результатом задачи 20.15.

46.16. а) n^2-n; б) n^2-2n+1.

46.17. $\begin{cases} 3x_1+6x_2-2x_3=-7, \\ x_1+4x_2+x_4=-7. \end{cases}$

46.18. $x_1+(2+i)x_2+ix_3+(1-i)x_4=1+i$.

46.19. $x_1+x_2-2x_3+x_4=0$.

46.20. $\begin{cases}2x_1+ix_2-x_4=0,\\ ix_1-(1-2i)x_2+x_3=1-2i.\end{cases}$

46.21. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_4=0,\\ -x_1+3x_2-x_3-x_4=2,\\ x_1+x_2+2x_3=-3.\end{cases}$

46.22. $\begin{cases}x_1+ix_2+(1-i)x_3=-1,\\ 2ix_1-x_2+ix_3=2,\\ 3ix_1-2x_2+(1+2i)x_3=2-i.\end{cases}$

46.23. а) $\operatorname{rg}A=m$, $n=m+1$; б) $\operatorname{rg}A=m$, $n=m+2$.

46.24. Указание. Преобразовать линейно независимую систему векторов (см. задачу 46.3) из базиса направляющего подпространства $e_1,\dots,e_k$ и вектора сдвига a так, чтобы все векторы принадлежали многообразию.

46.26. Если $x_0,x_1,\dots,x_k$ – заданная система векторов, то в качестве вектора сдвига можно взять x_0, а в качестве направляющего подпространства – $\mathcal{L}(x_1-x_0,\dots,x_k-x_0)$.

46.28. Если $k=n-1$, то единственным многообразием является все пространство V. Если $k<n-1$, то многообразия имеют вид $x_0+\mathcal{L}(x_1-x_0,\dots,x_k-x_0,y_1,\dots,y_l)$, где $l\leq n-1-k$ и $y_1,\dots,y_l$ – произвольные векторы, для которых система $x_0,x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_l$ линейно независима.

46.29. $q^{n-k}(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-k+1})/b$, где $b=(q^k-1)(q^k-q)\dots(q^k-q^{k-1})$.

46.31. L_1+L_2. **46.32.** L, если $\lambda\neq 0$, $\{\theta\}$, если $\lambda=0$.

46.33. Да, если $L=\{\theta\}$.

46.35. $\dim M=n-k$. Указание. Установить изоморфизм между M и произвольным подпространством, дополнительным к L.

46.36. Содержит вектор u, не содержит вектор v.

46.38. а) Прямая не пересекается с многообразием; б) прямая имеет с многообразием единственный общий вектор $z=(2,1,-2,2)$; в) прямая лежит на многообразии.

46.39. Векторы x_1-x_2,q_1,q_2 должны быть линейно зависимы.

46.40. Векторы q_1,q_2 должны быть линейно независимы, а вектор x_1-x_2 должен линейно выражать через q_1,a_2.

46.41. Общий вектор $z=(-5,11,-16,-11,7)$, плоскость имеет вид $z+\mathcal{L}(q_1,q_2)$.

46.42. Общий вектор $z=(-2,-5,-1,1,-1)$, плоскость имеет вид $z+\mathcal{L}(q_1,q_2)$.

46.43. Общий вектор $z=(0,1,-1,-2,-3)$, плоскость имеет вид $z+\mathcal{L}(q_1,q_2)$.

46.44. При $\lambda=1$.

46.45. Векторы x_1-c,x_2-c,q_1,q_2 линейно зависимы, а каждая из систем x_1-c,q_1,q_2 и x_2-c,q_1,q_2 линейно независима.

46.46. $x=c+tq$, где $q=(6,7,-8,-11)$; векторы пересечения: $(2,2,-3,-4)$, $(-4,-5,5,7)$.

46.47. $x=c+tq$, где $q=(1,1,0,3)$; векторы пересечения: $(2,3,2,1)$, $(1,2,2,-2)$.

46.48. Указание. Проанализировать параметрические уравнения прямых.

46.49. $x_1+\mathcal{L}(x_2-x_1,q_1,q_2)$.

46.51. Имеют один общий вектор $z=(1,2,1,0,1)$.

46.52. Не пересекаются; направляющие подпространства пересекаются по нулевому вектору.

46.53. Не пересекаются; направляющие подпространства пересекаются по одномерному подпространству, натянутому на вектор $(5,1,0,0,5)$.

46.54. Пересекаются по прямой $x = z_0 + q_2 t$, где $z_0 = (-2,-1,6,6,7)$.

46.55. Введем две матрицы: A – матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов p_1, p_2, q_1, q_2, B – матрица, полученная из A приписыванием столбца координат вектора $x_0 - y_0$. Пусть $\operatorname{rg} A = r_1$, $\operatorname{rg} B = r_2$. Возможен один из шести случаев:

1) $r_1 = 4$, $r_2 = 5$: плоскости не лежат в одном четырехмерном многообразии;

2) $r_1 = r_2 = 4$: плоскости имеют одну общую точку, и следовательно, лежат в одном четырехмерном, но не лежат в одном трехмерном многообразии;

3) $r_1 = 3$, $r_4 = 4$: плоскости не имеют общих точек, лежат в одном четырехмерном, но не лежат в одном трехмерном многообразии;

4) $r_1 = r_2 = 3$: плоскости лежат в трехмерном многообразии и пересекаются по прямой;

5) $r_1 = 2$, $r_2 = 3$: плоскости не имеют общих точек, но лежат в одном трехмерном многообразии;

6) $r_1 = r_2 = 2$: плоскости совпадают.

46.57. Если две плоскости трехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую прямую. Если плоскость и трехмерное линейное многообразие четырехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую прямую. Если два трехмерных линейных многообразия четырехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую плоскость.

46.58. Линейное многообразие имеет уравнение $x = a_1 + t_1(a_2 - a_1) + t_2(a_4 - a_1)$. Пересечение с заданной прямой: а) состоит из одного вектора $(0,0,2,3)$; б) пусто.

46.62. Плоскость, параллельная H_1 и H_2 и проходящая через одну из точек указанного вида.

46.63. Если характеристика поля равна 2, то это утверждение неверно. Указание. Записать уравнение прямой, содержащей a и b, в виде $\lambda a + (1-\lambda)b$, $\lambda \in P$.

46.66. Указание. Показать, что $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) = \dim(L_1 \cap \ldots \cap L_k)$, а затем по индукции показать, что в n-мерном пространстве размерность пересечения k подпространств размерности $n-1$ не меньше $n-k$.

46.67. Указание. Дополнить базис направляющего подпространства рассматриваемого многообразия до базиса всего пространства.

§47

47.2. Пусть e – произвольный фиксированный базис пространства. Для любых векторов x и y обозначим через x_e и y_e их координатные столбцы в базисе e. Тогда скалярное произведение можно ввести равенствами $(x,y) = x_e^T y_e$ в вещественном случае и $(x,y) = x_e^T \overline{y_e}$ в комплексном случае.

47.3. Изменение масштабной единицы для измерения длин.

47.5. а,д,е,ж) Нет; б,в,г) да.

47.7. Указание. При проверке последней аксиомы воспользоваться неравенством $2|x_i x_j| \le |x_i|^2 + |x_j|^2$.

47.8. а,б,в,г,ж,и) Нет; д,е,з) да.

47.9. $A^H = A$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $\det A > 0$.

47.10. а,в,г) Нет; б,д) да.

47.11. Только правило б). **47.12.** 1) Да; 2) да, если $m \geq n+1$.

47.13. 1) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

2) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $G(e) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

4) $G(e) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

47.14. 1) $G(e) = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$;

2) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & 2+i \\ 0 & 2-i & 6 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i & 2+i \\ 1+2i & 3 & 2+i \\ 2-i & 2-i & 6 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = I$.

47.15. а) $G = I$; б) $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (i+j-1)^{-1}$;

в) $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = 2(i+j-1)^{-1}$, если $i+j$ четно, и $g_{ij} = 0$, если $i+j$ нечетно;

г) $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{\min(i-1,j-1)} \dfrac{(i-1)!(j-1)!}{(i-k-1)!(j-k-1)!} a^{i+j-2k-2}$; при $a = 0$: $g_{ij} = ((i-1)!)^2 \delta_{ij}$;

д) $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} t^{k(i+j-2)}$.

47.16. $\det G' = \det G (\det S)^2$.

47.16.1. а,в) Не изменится; б) умножится на $|\alpha|^2$.

47.17. Указание. Воспользоваться результатами задачи 47.15.

47.18. 1) $G(e) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $(x,y) = -1$; 2) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $(x,y) = 5$;

3) $G(e) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(x,y) = 7$; 4) $G(e) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $(x,y) = 3$;

5) $G(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(x,y) = -3$.

47.19. 1) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $(x,y) = 1+3i$; 2) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(x,y) = 7i$.

47.20. Будет, если $\alpha = 0$.

47.23. Указание. Ввести произвольным образом скалярное произведение на L^δ и использовать предыдущую задачу.

47.28. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей и свойствами следа матрицы.

47.30. Нет.

47.31. 1) $|a| = 5\sqrt{2}$; 2) $|a| = \sqrt{30}$; 3) $|a| = \sqrt{6}$; 4) $|a| = \sqrt{26}$; 5) $|a| = \sqrt{6}$; 6) $|a| = \sqrt{10}$.

47.32. Совпадает с тождеством параллелограмма.

47.32.2. Указание. Показать, что $\operatorname{Re}(x,y) = |x| \cdot |y|$ и $\operatorname{Im}(x,y) = 0$.

§48

48.1. Да, верны. **48.4.** Да, верно.

48.8. Нет, неверно. Если в системе есть нулевой вектор, то она линейно зависима.

48.12. Указание. Вычислить A^TA и воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

48.13. Указание. При $n \geq 3$ записать компоненты векторов базиса в строки матрицы и проанализировать ее первые три строки.

48.15. 1) $1, t, \ldots, t^n$; 2) $(k!)^{-1}(t-a)^k$, $k = \overline{0,n}$; 3) $\prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n+1} (t-t_j)(t_k-t_j)^{-1}$, $k = \overline{1,n+1}$.

48.17. Указание. Воспользоваться задачами 48.5 и 48.6.

48.18. Если $x_e = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y_e = (y_1, \ldots, y_n)^T$, то: а) $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i y_i$;

б) $(x,y) = (2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1) + \sum\limits_{i=2}^{n} x_iy_i$.

48.19. Да, единственным. Указание. См. задачу 47.2.

48.20. Указание. Применить процесс ортогонализации к системе $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

48.21. Для $f(t) = a_1 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$, $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \ldots + b_nt^n$ положить $(f,g) = a_0b_0 + a_1b_1 + (2!)^2a_2b_2 + \ldots + (n!)^2a_nb_n$.

48.22. 1) $\frac{1}{3}(1,-2,2)$; 2) $\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}(2,-1)$;
5) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1,-1,1)$.

48.23. 1) $\frac{1}{2}(1+i,-1+i)$; 2) $\frac{1}{2}(1-i,1,-i)$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{5}}(0,1,-5i)$.

48.24. Указание. Предположить противное – хотя один из векторов $g_1, \ldots, g_k$ нулевой.

48.25. 1) $(1,-3,1)$, $(2,1,1)$; 2) $(1,0,-1,2)$, $(1,2,1,0)$;
3) $(2,0,-1)$, $(1,-1,2)$, $(1,5,2)$;
4) $(1,2,2)$, $(2,1,-2)$, $(2,-2,1)$;
5) $(2,1,-2)$, $(1,0,1)$, $(-1,4,1)$;
6) $(1,1,-1,0)$, $(0,1,1,-1)$, $(1,0,1,1)$.

48.28. $1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t$.

48.29. Указание. Выполнить интегрирование по частям.

48.31. 1) Например, векторами $a_3 = (1,1,1,0)$, $a_4 = (-1,1,0,1)$;
2) например, векторами $a_3 = (2,3,1,0)$, $a_4 = (1,-1,1,1)$;
3) например, векторами $a_3 = (0,-3,1,1)$, $a_4 = (11,-3,-10,1)$;
4) например, векторами $a_3 = (6,-5,-2,3)$, $a_4 = (2,1,10,-7)$.

48.32. 1) Например, вектором $a_3 = (11-3i, 1, -6+i)$;
2) например, вектором $a_3 = (4+3i, 16+8i, 8+3i)$.

48.33. 1) Например, вектором $a_3 = \frac{1}{3}(2,-1,2)$;
2) например, векторами $a_3 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $a_4 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$;

3) например, векторами $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)$, $a_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1)$;

4) например, $a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,0,-1)$, $a_4 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2,2,-3,-2)$.

48.34. 1) $g_1 = (2,3,-4,-6)$, $g_2 = (-3,2,6,-4)$, $g_3 = (4,6,2,3)$;
2) $g_1 = (1,1,-1,-2)$, $g_2 = (2,5,1,3)$, $g_3 = (2,-1,1,0)$.

48.35. 1) $g_1 = (2,1,-i)$, $g_2 = (1+i,-1,-2+i)$, $g_3 = (-1+i,4-i,-1+2i)$;
2) $g_1 = (0,1-i,2)$, $g_2 = (1,1+i,-i)$.

48.36. $n-1$.

48.37. 1) Например, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$;

2) например, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$, $\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$;

3) например, $\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-2,1)$;

4) например, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{22}}(-2,3,2,-2,1)$;

5) например, $\frac{1}{2}(1,-1,1,-1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,2,2,1)$;

6) например, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1,0,0)$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}(1,3,1,3,0)$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}(1,1,-1,-1,-4)$.

48.38. Указание. Показать, что процессу ортогонализации соответствует треугольная матрица перехода и учесть результат задачи 47.16.1.

48.39. Обе матрицы равны G^{-1}. **48.40.** а) $(S^T)^{-1}$; б) $(\overline{S}^T)^{-1}$.

48.41. Указание. Воспользоваться задачей 48.38 и учесть, что в результате применения процесса ортогонализации к системе $f_1,\dots,f_k$ получается система $g_1,\dots,g_k$, для которой $|g_i| \le |f_i|$, $i = \overline{1,k}$.

48.45. Если системы $e_1,\dots,e_k$ и $f_1,\dots,f_k$ биортогональны, то система $h_1,\dots,h_k$ также образует с системой $e_1,\dots,e_k$ биортогональную пару тогда и только тогда, когда векторы $f_1 - h_1,\dots,f_k - h_k$ ортогональны подпространству $\mathcal{L}(e_1,\dots,e_k)$.

48.48. $f_1 = (5/2,-1/2)$, $f_2 = (-3/2,1/2)$.

48.49. $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1/2,0)$, $f_3 = (0,0,1/3)$.

48.50. $f_1 = (3,-3,1)$, $f_2 = (-5/2,4,-3/2)$, $f_3 = (1/2,-1,1/2)$.

48.51. $f_1 = (1,-3,-13)$, $f_2 = (0,1,5)$, $f_3 = (0,0,1)$.

48.52. $f_1 = (1,0,0,0)$, $f_2 = (0,1,0,0)$, $f_3 = (-1,-2,1,-2)$, $f_4 = (1,2,-1,3)$.

48.53. $f_1 = (0,1/3,1/3,1/3)$, $f_2 = (1/3,0,1/3,1/3)$, $f_3 = (1/3,1/3,0,1/3)$, $f_4 = (1/3,1/3,1/3,0)$.

48.54. $f_1 = (0,0,0,1)$, $f_2 = (0,0,1,-1)$, $f_3 = (0,1,-1,0)$, $f_4 = (1,-1,0,0)$.

48.55. $f_1 = \frac{1}{5}(3-i,-1-3i,-1+2i)$, $f_2 = \frac{1}{5}(2+i,1+3i,1-2i)$, $f_3 = \frac{1}{5}(-1+2i,2+i,2+i)$.

48.56. 1) $f_1 = (0,0,0,1)$, $f_2 = (1/3,1/3,1/3,-1)$;
2) $f_1 = (2/7,3/7,2/7,2/7)$, $f_2 = (4/7,-1/7,-3/7,-3/7)$, $f_3 = (-3/7,-1/7,-3/7,4/7)$.

48.57. 1) $\frac{3}{8}(3-5t^2)$, $\frac{3}{2}t$, $-\frac{15}{8}(1-3t^2)$;

2) $\frac{3}{8}(3-5t^2)$, $\frac{15}{8}(5t-7t^3)$, $-\frac{15}{8}(1-3t^2)$, $-\frac{35}{8}(3t-5t^3)$.

§49

49.6. Указание. Воспользоваться результатом задачи 45.65.

49.8. Указание. Показать, что строки матрицы B линейно выражаются через строки матрицы A.

49.12. а) Например, $b_1 = (2,-2,-1,0)$, $b_2 = (1,1,0,-1)$; б) например, $b_1 = (0,1,0,-1)$, $b_2 = (1,0,-1,0)$; в) например, $b_1 = (-3,1,-2,0)$, $b_2 = (1,-1,-2,1)$.

49.13. а) Например, $b_1 = (-4+2i,-i,1-2i)$; б) например, $b_1 = (i,0,0)$, $b_2 = (-2,-2+i,0)$, $b_3 = (-2,0,1)$, $b_4 = (2,1,i)$.

49.14. а) $x_2 + x_4 = 0$; б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -18x_1 + x_2 + 18x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

в) $4x_1 - ix_2 + (1+5i)x_3 = 0$.

49.16. $L: \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ $L^\perp: \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

49.17. а) Подпространство, натянутое на многочлен $1 + t + \ldots + t^n$; б) подпространство, натянутое на многочлен $t + t^3 + \ldots + t^{2k+1}$, где $2k+1$ – наибольшее нечетное число, не превосходящее n; в) подпространство, натянутое на многочлен $1 + 2t + 3t^2 + \ldots + (n+1)t^n$; г) подпространство всех нечетных многочленов из M_n.

49.18. а) Подпространство скалярных матриц; б) подпространство кососимметрических матриц; в) подпространство симметрических матриц; г) подпространство нижних треугольных матриц с нулевой главной диагональю.

49.19. Указание. Учесть, что величина $\operatorname{tr}(A^T B)$ задает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$.

49.21. Указание. Показать, что A ортогональна подпространству матриц, у которых все строчные суммы равны нулю.

49.22. Указание. Показать, что A ортогональна подпространству матриц, у которых все строчные и все столбцовые суммы равны нулю.

49.23. а) $(1,-10,0)^T$, $(0,7,1)^T$; б) $(3,2,-5)^T$;

в) $(5,1,0,0)^T$, $(2,0,-1,0)^T$, $(9,0,0,1)^T$; г) $(2,1,0,-3)^T$, $(1,0,1,4)^T$;

д) $(1,0,-5,1)^T$, $(0,1,1,-3)^T$.

49.24. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$, $\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$;

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,2,1)$;

г) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{15}}(3,1,2,1)$;

д) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1,0)$, $\frac{1}{2\sqrt{6}}(1,-3,2,1,-3)$.

49.25. а) $(1,1,-1,1)^T$, $(10,1,0,-2)^T$;

б) $(0,1,1,-1)^T$, $(1,0,-2,3)^T$;

в) $(1,1,-1,-1,1)^T$, $(0,1,2,3,4)^T$.

49.26. а) $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$; б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0; \end{cases}$

д) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

49.29. Указание. Пусть L и M – заданные подпространства пространства E (U) размерности n. Рассмотреть два случая.

1) Пусть сначала $L \cap M = \{\theta\}$.

а) Если при этом $L \perp M$, то в L и M можно взять любые базисы.

б) Если же L и M не ортогональны, то выбрать $e_1 \in L$, неортогональный M. Из ортогонального разложения $e_1 = f_1 + e_0$, $f_1 \in M$, $e_0 \in M^\perp$, следует, что $f_1 \neq \theta$ и потому $(e_1, f_1) = (f_1, f_1) > 0$.

Далее перейти к подпространствам $L_1 = L \cap (\mathcal{L}(f_1))^\perp$ и $M_1 = M \cap (\mathcal{L}(e_1))^\perp$. Вектор $e_1 \notin L_1$ (так как иначе бы $(e_1, f_1) = 0$). Так как $e_1 \in L$ и $\dim(\mathcal{L}(f_1))^\perp = n - 1$, то $\dim(L + (\mathcal{L}(f_1))^\perp) = n$ и $\dim L_1 = \dim L - 1$. Аналогично, $f_1 \notin M_1$ и $\dim M_1 = \dim M - 1$.

Далее снова строятся тем же способом векторы e_2 и f_2 в подпространствах L_1 и M_1 соответственно ($L_1 \cap M_1 = \{\theta\}$). При этом $(e_1, f_1) \geq 0$, $(e_2, f_1) = (e_1, f_2) = 0$, $(e_2, f_2) \geq 0$.

2) Пусть $L \cap M \neq \{\theta\}$. Тогда выполнить разложения: $L = (L \cap M) \oplus L'$ и $M = (L \cap M) \oplus M'$, где $L' = (L \cap M)^\perp \cap L$, $M' = (L \cap M)^\perp \cap M$. В подпространстве $L \cap M$ выбирается любой ортонормированный базис $e_1 = f_1, \ldots, e_s = f_s$, а в L' и M' – базисы $e_{s+1}, \ldots, e_m$ и $f_{s+1}, \ldots, f_k$, повторяя построение п.1.

49.30. $g = (5,2,-9,-8)$, $h = (9,-5,3,1)$.

49.31. $g = (0,-3,5,2)$, $h = (2,-2,-2,2)$.

49.32. $g = (1,-1,-1,5)$, $h = (3,0,-2,-1)$.

49.33. $g = (3,1,-1,-2)$, $h = (2,1,-1,4)$.

49.34. $g = (2-i,-1,i)$, $h = (-2+i,i,-1+5i)$.

49.35. $g = (1,2,-5,1)$, $h = (-4,-2,0,8)$.

49.36. $g = (5,-5,-2,-1)$, $h = (2,1,1,3)$.

49.37. $g = (5,2,-1,1)$, $h = (3,-4,9,2)$.

49.38. $g = (1,1,-1,1)$, $h = (1,2,0,-3)$.

49.39. $g = (2+i,1-9i,4+3i)$, $h = (-2-i,-1+2i,3+4i)$.

49.40. $g = (3+i,-4+2i,-1+3i)$, $h = (1-i,-2i,1+i)$.

49.41. $g = (0,i,0,-1)$, $h = (3-i,1+i,2,1-i)$.

49.42. $g(t) = 1 - 2t + t^2$, $h(t) = 2t + 4t^2 + 6t^3 + 8t^4$.

49.43. $g(t) = 3 + 5t^2 - t^4$, $h(t) = 3t + 3t^3$.

49.44. $g(t) = 6t^2 - 4t^4$, $h(t) = 2 - 2t^2 - 3t^4$.

49.45. а) $g(t) = 1 + t$; б) $g(t) = \frac{19}{30} + \frac{29}{10}t$; в) $g(t) = -2 + 6t$;

г) $g(t) = -31 + \frac{134}{5}t$.

49.49. Указание. Пользуясь матрицами G и G^{-1}, найти (g,g), где g – ортогональная проекция f на $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_m)$.

49.51. Указание. Воспользоваться задачей 49.49.

49.52. Указание. Воспользоваться равенством п."1)" задачи 49.50.

49.53. Указание. 1) Рассмотреть матрицу $A^H A$ как матрицу Грама системы столбцов матрицы A.

49.54. Указание. Использовать результат задачи 49.10.

49.55. Указание. Воспользоваться результатами задач 48.38 и 49.54.

§50

50.1. 1) а) 0; б) $\pi/6$; в) $3\pi/4$; 2) а) π; б) $2\pi/3$; в) $\arccos\sqrt{7/10}$;
3) а) $\arccos(1/\sqrt{3})$; б) $\pi/2$; 4) а) $\pi/4$; б) $\pi/2$.

50.2. а) Не изменится; б) заменится на дополнительный до π; в) не изменится.

50.4. а) $|x| = 3\sqrt{2}$, $|y| = 6$, $|x-y| = 3\sqrt{2}$, поэтому треугольник равнобедренный; $\widehat{(x, x-y)} = \pi/2$, поэтому треугольник прямоугольный; $\widehat{(x, y)} = \pi/4$ и является внутренним углом треугольника; $\widehat{(y, x-y)} = 3\pi/4$, поэтому внутренним углом является $\widehat{(y, y-x)}$;

б) $|x| = |y| = |x-y| = 6$, поэтому треугольник равносторонний; углы $\widehat{(x, y)} = \widehat{(x, x-y)} = \widehat{(y, y-x)} = \pi/3$ являются внутренними.

50.5. Указание. 4) Воспользоваться теоремой косинусов из предыдущего пункта.

50.7. Нет.

50.9. Параллелограмм, у которого равны диагонали, является прямоугольником.

50.9.1. Равенство справедливо лишь тогда, когда $\operatorname{Re}(x, y) = 0$.

50.10. Указание. Показать, что если нетривиальная линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_{n+1}$ равна θ, то все коэффициенты одного знака. Далее показать, что в минимальную линейно зависимую подсистему входят все векторы.

50.11. Указание. От противного: если все углы тупые, то в равной нулевому вектору нетривиальной линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_{n+2}$ все коэффициенты одного знака; с другой стороны эти коэффициенты могут быть подобраны так, чтобы их сумма равнялась нулю (см. задачу 44.90).

50.12. Указание. Показать, что матрица Грама невырождена.

50.13. Нет.

50.15. Указание. Пусть g – ортогональная проекция f на L. Пользуясь тем, что $(g, f-g) = 0$, показать, что $\sin\widehat{(f, f-g)} = \cos\widehat{(f, g)}$.

50.19. $\pi/4$. **50.20.** $\pi/3$. **50.21.** $\pi/3$.

50.22. $\pi/6$. **50.23.** $\arccos(2/3)$. **50.24.** $\pi/6$. **50.25.** $\pi/3$.

50.26. $\arccos(1/\sqrt{6})$. **50.27.** $\pi/2$. **50.28.** $\sqrt{58/15}$.

50.29. $\sqrt{42}$. **50.30.** $\sqrt{3}$. **50.31.** 1. **50.32.** $2\sqrt{10}$.

50.33. 1. **50.34.** $\sqrt{110}$. **50.35.** $\sqrt{14}$. **50.36.** $\sqrt{22/3}$.

50.37. Указание. См. задачу 49.51, пункт "1)".

50.39. а) $t^2 + 3t + 3$; б) 3; в) $(3 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_n^2)^{1/2}$.

50.39.1. Указание. 1) Искать вектор f в виде $\alpha(a_2 - a_1) + \beta(a_3 - a_1)$.

50.42. Указание. Перпендикуляр из вектора x на L коллинеарен вектору a.

50.43. а) 1; б) 1; в) α_n.

50.44. Указание. Использовать задачу 50.42.

50.45.1. Указание. Для $a \in L, |a| = 1$ и $\forall k \in \mathbb{R}$ найти угол между векторами $y_1 + ka$ и $y_2 + ka$, где $y_1 \in L_1$ и $y_2 \in L_2$ – любые нележащие в L векторы.

50.46. Косинус угла равен модулю косинуса угла между a_1 и a_2. Указание. Показать, что подпространства D_1 и D_2 из определения угла между L_1 и L_2 одномерны и натянуты на $(a_1, a_2)a_1 - |a_1|^2 a_2$ и $|a_2|^2 a_1 - (a_1, a_2)a_2$.

50.47. 1) $\arccos(2/7)$; 2) $\arccos(\sqrt{2/3})$; 3) $\pi/2$; 4) 0.

50.48. а) $\pi/2$; б) $\arccos\sqrt{1 - \dfrac{1}{4k^2}}$.

50.49. а) $\arccos\sqrt{\dfrac{3(n+1)}{2(2n+1)}}$; б) $\arccos\sqrt{\dfrac{3(2^{n+1}-1)}{(n+1)(2^{n+1}+1)}}$;

в) $\arccos\sqrt{\dfrac{1}{n}}$; г) $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{n+1}}$.

50.50. Указание. Использовать задачу 48.38.

50.51. а) $\left(\dfrac{(1!2!\ldots n!)^3}{(n+1)!(n+2)!\ldots(2n+1)!}\right)^{1/2}$; б) $\left(C_{2n}^n\sqrt{4n+1}\right)^{-1}$.

50.52. Указание. Использовать результат задачи 49.51.

50.53. Указание. Использовать результат задачи 49.55.

50.54. Указание. Использовать результат задачи 50.52.

50.55. Указание. Использовать предыдущую задачу и задачу 50.52.

§51

51.1. При $b = 0$.

51.2. Указание. Если гиперплоскость имеет вид $x_0 + L$, то n – базис $L^\perp$.

51.4. Указание. Искать x_0 в виде αn.

51.5. $n(t) = 1 + ct + c^2t^2 + \ldots + c^nt^n$, $b = d$. **51.6.** Нет.

51.7. Указание. Показать, что многочлены $n_k(t)$, $k = \overline{0,n}$, в представлении подпространства $\{f(t) \in M_n \mid f^{(k)}(t_1) = 0\}$ равенством $(n_k, f) = 0$ образуют базис пространства M_n.

51.11. Указание. Показать, что направляющее подпространство этого многообразия есть ортогональное дополнение к $\mathcal{L}(n_1, \ldots, n_k)$.

51.12. Нормальный вектор равен αn, где $\alpha = \overline{b}/(n,n)$.

51.14. а) 1; б) t;

в) $\dfrac{4(n-1)}{(n+1)(n+2)}(1+t+\ldots+t^n) - \dfrac{6(n-2)}{n(n+1)(n+2)}(t+2t^2+\ldots+nt^n)$;

г) $\dfrac{1}{2}(1+t) - \dfrac{1}{n-1}(t^2+\ldots+t^n)$.

51.16. 5. **51.17.** а) $\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sqrt{n}$; в) $\dfrac{3(n+2)(n-1)}{\sqrt{6n(n+1)(2n+1)}}$.

51.18. а) $\dfrac{n-1}{\sqrt{n}}$; б) $n-1$; в) $n-1$. **51.20.** 2.

51.21. 2. **51.22.** 150. **51.23.** 5. **51.24.** 5.

51.25. Указание. Ввести в пространстве скалярное произведение так, чтобы заданный базис стал ортонормированным.

51.26. См. указание к предыдущей задаче.

51.27. Указание. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис направляющего подпространства многообразия H. Линейно независимую систему $e_1, \ldots, e_k, x$ дополнить до базиса всего пространства и ввести скалярное произведение так, чтобы этот базис стал ортонормированным.

51.28. $\pi/4$. **51.29.** $\pi/2$.

§52

52.2. Всякий линейный оператор является оператором возведения чисел в степень с фиксированным (для данного оператора) действительным показателем.

52.3. а,б) Да, если $a = \theta$; в) да. **52.4.** а,б,г,д) Да; в) нет.

52.5. а) Ортогональное проектирование на прямую $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$; б) проектирование на прямую $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$ параллельно подпространству $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; в) ортогональное проектирование на подпространство $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; г) проектирование на подпространство $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$; д) ортогональное отражение относительно подпространства $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; е) ортогональное отражение относительно прямой $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$; ж) суперпозиция ортогонального проектирования на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0$ и поворота на угол $\pi/2$ вокруг прямой $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$.

52.6. а,в,д,ж) Да; б,г,е,з) нет.

52.7. а-д,з,и,к,м) Да; е,ж,л) нет. **52.11.** а-д) Да.

52.12. а,б) Да, в пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$; в,г) да, в пространство $\mathbb{R}$; д,ж) нет; е) только если $|B| = 0$, да, в пространство $\mathbb{R}$; з) да, в пространство $\mathbb{R}^{n\times m}$; и) да, в пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$; к) да, в пространство $\mathbb{R}^{nm\times nk}$.

52.13. а) Не является ни сюръективным, ни инъективным; б,в) является биективным.

52.14. В случае, если $f_1, \ldots, f_k$ – базис V.

52.15. Пусть $f_1, \ldots, f_r$ – база системы $f_1, \ldots, f_k$. Тогда векторы $f_{k+1}, \ldots, f_k$ должны быть такими же линейными комбинациями векторов $f_1, \ldots, f_r$, как $g_{r+1}, \ldots, g_k$ – векторов $g_1, \ldots, g_r$. Оператор $\mathcal{A}$ единствен, если r совпадает с $\dim V$.

52.16. Указание. Использовать задачу 52.14.

52.19. а) Да, если $\alpha = 0$; б,д,е) да; в,г) нет.

52.21. Линейную форму φ в пространстве M_n можно задать таким образом тогда и только тогда, когда для чисел $c_k = \varphi(t^k)$ выполнены соотношения: $c_0 = 1$, $\dfrac{c_k}{c_{k-1}} \equiv q$, $k = \overline{1,n}$.

52.22. Ненулевую линейную форму φ в пространстве M_n можно задать таким образом тогда и только тогда, когда для чисел $c_k = (k+1)\varphi(t^k)$ выполнены соотношения: $c_0 \neq 0$, $c_k = \left(\dfrac{c_1}{2c_0} + \dfrac{c_0}{2}\right)^{k+1} - \left(\dfrac{c_1}{2c_0} - \dfrac{c_0}{2}\right)^{k+1}$, $k = \overline{2,n}$.

52.23. Нет, если эта форма ненулевая.

52.24. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

52.25. а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

52.26. а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

52.27. а) $A_e = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A_f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

52.28. а) $A_e = \begin{bmatrix} -2 & 11/3 & 5/3 \\ -4 & 13/3 & 10/3 \\ 2 & -5/3 & -5/3 \end{bmatrix}$; б) $A_f = \begin{bmatrix} -10/3 & -7 & 3 \\ 5/3 & 3 & -2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

52.29. а) $A_e = \begin{bmatrix} 5 & -20 & 33 \\ 7 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A_f = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 7 \\ 6 & 13 & -10 \\ 17 & 36 & -27 \end{bmatrix}$.

52.30. $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **52.31.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. **52.32.** $\begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$.

52.33. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. **52.34.** $\begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$.

52.35. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 8 & 0 & 8 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$. **52.36.** $\begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$.

52.37. $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$. **52.38.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$.

52.39. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

52.40. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\cdot 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

52.41. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & h & h^2 & \dots & h^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & 3ht & \dots & C_n^1 h^{n-2} t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 & \dots & C_n^2 h^{n-3} t^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^{n-1} t^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

52.42. $\operatorname{diag}(1, 1/2, 1/3, \dots, 1/(n+1))$.

52.43. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots & (n-1)a^{n-2} & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3a & \dots & C_{n-1}^3 a^{n-4} & C_n^3 a^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^5 a^{n-6} & C_n^5 a^{n-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

где $\alpha_n = 1$, если n нечетно, и $\alpha_n = 0$, если n четно.

52.44. $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/n \end{bmatrix}$.

52.45. а) Первые k элементов главной диагонали равны 1, все остальные элементы равны 0; б) последние $n-k$ элементов главной диагонали равны 1, все остальные элементы равны 0; в) матрица диагональная, первые k элементов ее главной диагонали равны 1, остальные равны -1.

52.46. $A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$.

52.47. Введем для любых двух векторов $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ матрицу $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\, x_2\, x_3)^T (y_1\, y_2\, y_3)$. Тогда матрица A_e имеет вид: а) $I - S(\mathbf{n}, \mathbf{n})$; б) $S(\mathbf{a}, \mathbf{a})$; в) $I - \dfrac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} S(\mathbf{a}, \mathbf{n})$; г) $\dfrac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} S(\mathbf{a}, \mathbf{n})$; д) $I - 2S(\mathbf{n}, \mathbf{n})$; е) $2S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - I$; ж) $I - \dfrac{2}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} S(\mathbf{a}, \mathbf{n})$; з) $\dfrac{2}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} S(\mathbf{a}, \mathbf{n}) - I$.

Указание. Использовать результат задачи 52.5.

52.48. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Указание. Использовать результат задачи 52.47.

52.49. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 8 & 12 & -4 \\ 10 & 15 & -5 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. Указание. Использовать результат задачи 52.47.

52.50. а) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Указание. Использовать результат задачи 52.47.

52.51. а) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Указание. Использовать результат задачи 52.47.

52.52. а) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0 \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

52.53. а) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} A^T & O \\ O & A^T \end{bmatrix}$.

52.54. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} a_{11}B^T & a_{12}B^T \\ a_{21}B^T & a_{22}B^T \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} a_{11}I + B^T & a_{12}I \\ a_{21}I & a_{22}I + B^T \end{bmatrix}$.

52.55. а) $B^T \otimes A$; б) $I_n \otimes A + B^T \otimes I_m$.

52.56. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **52.57.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

52.58. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **52.59.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

§53

53.1. а) В матрице переставятся i-я и j-я строки и i-й и j-й столбцы; б) в матрице i-й столбец умножится на число α, а i-я строка разделится на число α.

53.3. В базисе $e_n \dots, e_1$.

53.4. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

53.5. $\operatorname{diag}(1,2,3)$. **53.6.** $\begin{bmatrix} 16 & 47 & -58 \\ 18 & 44 & -52 \\ 12 & 27 & -49 \end{bmatrix}$.

53.7. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -16 & 4 & -12 \\ 24 & -6 & 18 \end{bmatrix}$.

53.8. а) $\begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$.

Указание. Сначала выписать матрицу оператора в базисе из направляющих векторов данных прямых.

53.9. а) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 4 & 3 & 12 \\ -2 & -2 & -7 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
г) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}+1 & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 1 \end{bmatrix}$ и $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$;
д) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Указание. Сначала построить матрицу оператора в базисе, составленном из базисов данных подпространств.

53.10. а) $A_e = GF^{-1}$; б) $A_f = F^{-1}G$; в) $A_g = F^{-1}G$.

53.11. а) BA^{-1}; б) B; в) I.

53.12. 1) а) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\operatorname{diag}(1,2,2)$;

2) а) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$; б) $\operatorname{diag}(0,1,1)$;

3) а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ -7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

4) а) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -10 & -18 & -20 \\ 9 & 13 & 15 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

53.13. 1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$;
5) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$;
9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 10) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

53.14. 1) $\begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\operatorname{diag}(-1, 1+i, 1-i)$; 3) $\operatorname{diag}(2,2,-2,2i)$;
4) $\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$.

53.15. 1) $\begin{bmatrix} 36 & -25 & -3 \\ 23 & -16 & -2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -42 & 20 & -20 & 48 \\ 15 & -7 & 7 & -17 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$;
4) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -15 & 51/2 \\ 1 & 5 & -12 \\ 5 & 25 & -51/2 \\ 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$.

53.16. 1) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & -12 \\ -3 & 9 & 18 \\ 2 & -6 & -12 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 3,7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$;

4,5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ порядка $n+1$; 6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

53.17. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -15 & -16 & -20 \\ 9 & 12 & 16 \end{bmatrix}$.

53.18. а,б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

53.19. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

53.21. Нет.

53.22. Указание. Показать, что квадратная матрица A перестановочна с любой невырожденной матрицей тогда и только тогда, когда A скалярна.

53.26. Нет, неверно. Указание. Привести пример ненулевых матриц A и B, для которых $AB = O$, а $BA \neq O$.

53.28. Нет, неверно. **53.29.** Нет, неверны.

53.31. Нет, не означает.

53.33. Указание. Показать, что если матрица $S = P + iQ$ осуществляет подобие матриц A_1 и A_2, то матрица $\begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix}$ осуществляет подобие матриц D_1 и D_2.

§54

54.1. Последние $n-r$ столбцов матрицы нулевые, в то время как первые r линейно независимы.

54.2. Последние $n-r$ строк матрицы нулевые, в то время как первые r линейно независимы.

54.3. а) Образ – плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$, ядро – прямая $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$;

б) если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, то образ – прямая $[\mathbf{x}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$, а ядро – плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$; если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, то образ – плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$, а ядро – прямая $[\mathbf{x}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

54.4. $\operatorname{rg}\mathcal{A} = 1$, базис образа – $(1,1,1)$; $\operatorname{def}\mathcal{A} = 2$, базис ядра – $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$.

54.5. $\operatorname{rg}\mathcal{A} = 2$, базис образа – $(2,1,1)$, $(-1,-2,1)$; $\operatorname{def}\mathcal{A} = 1$, базис ядра – $(1,1,1)$.

54.6. $\operatorname{rg}\mathcal{A} = 3$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$.

54.7. $\operatorname{rg}\mathcal{A} = 2$, базис образа – $(2,1,2)$, $(1,8,1)$; $\operatorname{def}\mathcal{A} = 1$, базис ядра – $(0,1,1)$.

54.8. $\operatorname{rg}\mathcal{A}=2$, базис образа – $(1,2,0)$, $(-3,0,2)$; $\operatorname{def}\mathcal{A}=1$, базис ядра – $(2,1,-3)$.

54.9. 1) $(0,6,18)$; 2) $(0,0,0,0)$; 3) $(-8,-11,3,0,-13)$.

54.10. В базисе e координатные столбцы базисных векторов: 1) ядра – $(12,-5)^T$, образа – $(5,12)^T$; 2) ядра – $(1,1,-1)^T$, $(3,0,2)^T$, образа – $(1,1,-1)^T$; 3) ядра – $(1,-,1,1)^T$, образа – $(1,1,0)^T$, $(0,1,-1)^T$; 4) ядра – $(0,1,1,0)^T$, $(0,0,1,1)^T$, образа – $(1,1,-3,-3)^T$, $(1,-1,-1,1)^T$; 5,6) $\ker\mathcal{A}=\{\theta\}$, $\operatorname{im}\mathcal{A}=V$, $\mathcal{A}$ – изоморфизм.

54.11. В соответствующих базисах e или f координатные столбцы базисных векторов: 1) ядра – $(9,2,0,-8)^T$, $(5,4,2,0)^T$, образа – $(0,1,-1)^T$, $(-1,3,0)^T$; 2) образа – $(4,3,-1,7)^T$, $(5,2,3,7)^T$, $(9,7,2,6)^T$, $\ker\mathcal{A}=\{\theta\}$, $\mathcal{A}$ инъективно; 3) ядра – $(3,1,0)^T$, $(2,0,-1)^T$, образа – $(-2,1,7,-3)^T$; 4) ядра – $(2,0,1,-1,0)^T$, $(0,1,2,0,0)^T$, $(0,0,1,0,1)^T$, $\operatorname{im}\mathcal{A}=W$, $\mathcal{A}$ сюръективно; 5) ядра – $(0,1,1)^T$, образа – $(-2,-2,-3,4,6)^T$, $(2,2,2,1,-5)^T$; 6) ядра – $(-1,-1,0,3,6)^T$, $(-1,5,3,0,0)^T$, $\operatorname{im}\mathcal{A}=W$, $\mathcal{A}$ сюръективно.

54.12. $\operatorname{rg}\mathcal{F}=2$.

54.13. Указание. См. пример 54.4.

54.14. Указание. Составить матрицу оператора $\mathcal{G}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$.

54.15. См. указание к задаче 54.14.

54.16. См. указание к задаче 54.14.

54.17. Образ – M_{n-1}, ядро – M_0.

54.18. Образ – M_{n-1}, ядро – M_0.

54.19. $n+1-k$, если $k<n+1$, и 0, если $k\geq n+1$.

54.20. Образ – все четные многочлены из M_{n-1}, ядро – линейная оболочка, натянутая на многочлены $(t^2-a^2)^k$, $0\leq 2k\leq n$.

54.21. n, если f нулевой, $n-1$, если f ненулевой.

54.22. Двумерное подпространство векторов, ортогональных a; подпространство векторов, компланарных a и b.

54.23. Указание. Использовать результат задачи 45.47 для ядер функционалов.

54.24. Указание. Использовать результат задачи 45.46 для ядер функционалов.

54.27. 1) $(-5,-2,4,0)+\alpha_1(10,0,-7,6)+\alpha_2(0,5,-1,-7)$;
2) $(13,1,-3,0,0)+\alpha_1(19,2,-5,0,0)+\alpha_2(41,0,-11,2,0)+\alpha_3(1,0,-2,0,1)$;
3) $(0,0,1)+\alpha_1(1,-2,-3)$; 4) $(0,1,0,0)+\alpha_1(2,2,1,-1)$
(здесь $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3$, произвольны).

54.28. Линейная оболочка, натянутая на векторы:
1) $(1,1,0,0,0)$, $(0,1,2,0,0)$, $(2,0,1,-1,0)$, $(0,0,1,0,1)$;
2) $(1,1,-1,-1)$, $(0,2,1,0)$;
3) любого базиса $\mathbb{R}^6$.

54.29. Все четные многочлены.

54.30. 1) Базис образа – $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$, базис ядра – $\begin{bmatrix}3&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&3&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&1\end{bmatrix}$; 2) образ – все пространство $\mathbb{R}^{2\times 2}$, базис ядра – $\begin{bmatrix}-2&4&3\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&4&3\end{bmatrix}$.

54.31. Ядро состоит из матриц, у которых первые $n-1$ столбцов нулевые, образ – все пространство $\mathbb{R}^{m\times(n-1)}$.

54.32. 2) Ядро натянуто на вектор $(1,-2,1,-2)$, образ – все матрицы из $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вида $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$.

54.33. Указание. Каждому вектору из $\operatorname{im}\mathcal{A}$ поставить в соответствие линейное многообразие его прообразов.

54.34. Ядро – $\ker\mathcal{A}$, дефект равен нулю.

54.36. Указание. Построить базис так, чтобы $f(e_1)=1$, $f(e_2)=\ldots=f(e_n)=0$.

54.41. 1) $(1,0)$, $(-1,1)$ и $(1,1)$, $(0,1)$; 2) $(1,0)$, $(0,1)$ и $(1,3)$, $(3,10)$;
3) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,-1)$ и $(0,-1,-1)$, $(1,0,1)$, $(0,0,1)$;
4) $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,-1,-1)$ и $(1,-1,2)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;
5) $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,1,2,0,0)$, $(2,0,1,-1,0)$, $(0,0,1,0,1)$ и $(1,1)$, $(2,-2)$;
6) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-2,1)$ и $(-2,-2,-3,4,6)$, $(2,2,2,1,-5)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,0,1)$.

§55

55.1. а) $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -27 & 4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -34 & 27 \\ -39 & 31 \end{bmatrix}$.

55.2. $\begin{bmatrix} -5 & 14 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$. **55.3.** $\begin{bmatrix} 5 & -13 & -9 \\ 3 & -6 & -4 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

55.7. Нет, не является. Указание. Рассмотреть случай $\mathcal{A}=\mathcal{B}$.

55.8. Нет, не является. Указание. Рассмотреть случай $\mathcal{A}=\mathcal{B}$.

55.10. Нет, неверно.

55.12. Указание. Пусть $e_1,\ldots,e_n$ – базис V, и пусть $\mathcal{A}e_j=a_{1j}f_1+\ldots+a_{mj}f_m$. Тогда положить $\mathcal{B}_i e_j=a_{ij}f_i$.

55.14. Указание. Множество всех операторов, отображающих n-мерное пространство в одномерное пространство, имеет размерность n.

55.16. Указание. Учесть, что $\dim\mathcal{L}(V,W)=mn$.

55.17. а-г) Нет.

55.18. а) Нет, если этот образ отличен от нулевого пространства; б) нет, если это ядро не совпадает со всем пространством V.

55.19. kn. **55.20.** $m(n-l)$.

55.21. Указание. а) Пусть $e_1,\ldots,e_n$ – некоторый базис V. Для данного оператора $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V,L)$ фиксируем какие-либо разложения векторов $\mathcal{A}e_1,\ldots,\mathcal{A}e_n$ по подпространствам L_1 и L_2: $\mathcal{A}e_i=u_i+v_i$. Тогда $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1e_i=u_i$, $\mathcal{A}_2e_i=v_i$, $i=\overline{1,n}$.

55.22. Указание. Воспользоваться индукцией по k и результатом предыдущей задачи.

55.23. Указание. Использовать результат задачи 55.5, пункт "б)".

55.24. Указание. Воспользоваться результатом задачи 55.7.

55.27. Указание. Использовать тот факт, что матрицу оператора ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, и результат задачи 55.23.

55.28. Либо $\ker\mathcal{A}=\ker\mathcal{B}$, либо $\operatorname{im}\mathcal{A}=\operatorname{im}\mathcal{B}$. Указание. В случае, когда $\operatorname{im}\mathcal{A}\neq\operatorname{im}\mathcal{B}$, учесть результат задачи 55.24.

55.29. Пусть в L все операторы имеют ранг не выше 1, и пусть $\mathcal{A}\in L$ – произвольный оператор ранга 1. Рассмотрим в L подмножество L_1 всех операторов $\mathcal{B}$, для которых $\ker\mathcal{B}\supset\ker\mathcal{A}$, и подмножество L_2 всех операторов

$\mathcal{C}$, для которых $\operatorname{im}\mathcal{C} \subset \operatorname{im}\mathcal{A}$. Согласно 55.19 и 55.20 эти подмножества являются подпространствами L размерности не выше n. Поэтому $L_1 \neq L$, $L_2 \neq L$ и существует оператор $\mathcal{D} \in L$ такой, что $D \notin L_1$, $\mathcal{D} \notin L_2$, т.е. $\operatorname{im}\mathcal{D} \neq \operatorname{im}\mathcal{A}$, $\ker\mathcal{D} \neq \ker\mathcal{A}$. Но тогда в силу задачи 55.28 $\operatorname{rg}(\mathcal{A}+\mathcal{D}) = 2$.

55.30. Нет (см. задачу 55.13).

55.31. Да. Указание. Показать, что в любом базисе e пространства V: $A_e = B_e D$, где D – диагональная матрица. Далее доказать, что D – скалярная матрица.

55.32. Указание. Построить базис $e_1, \ldots, e_n$ в V так, чтобы векторы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ образовывали базис $\ker\mathcal{A}$, и рассмотреть матрицы операторов $\mathcal{A}$ и B в этом базисе.

55.33. Указание. Использовать предыдущую задачу.

55.34. Указание. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V. Тогда вектор $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ принадлежит ядру функционала f_k тогда и только тогда, когда $\alpha_1 f_k(e_1) + \ldots + \alpha_n f_k(e_n) = 0$. Рассмотреть систему таких соотношений с $k = \overline{1,n}$.

55.35. Указание. Воспользоваться результатом задачи 55.34.

55.36. См. указание к задаче 55.35.

55.37. См. указание к задаче 55.35.

55.38. $\ker(\mathcal{I}-\mathcal{P}) = \operatorname{im}\mathcal{P}$, $\operatorname{im}(\mathcal{I}-\mathcal{P}) = \ker\mathcal{P}$.

§56

56.1. а) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ 51 & -11 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 23 & -17 \\ 27 & -20 \end{bmatrix}$.

56.2. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

56.3. а) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & 8 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$.

56.4. а) O; б) O; в) $\begin{bmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

56.5. Указание. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ и $\operatorname{rg}\mathcal{A} = r$. Воспользоваться представлением матрицы оператора $\mathcal{A}$ в виде BC, где $B \in P^{m\times r}$, $C \in P^{r\times n}$, $\operatorname{rg}B = \operatorname{rg}C = r$, установленном в задаче 16.45, и результатом задачи 54.2.1.

56.6. Нет, неверно.

56.9. Указание. Показать, что $\ker\mathcal{P} \cap \operatorname{im}\mathcal{P} = \{\theta\}$ и $\mathcal{P}(\operatorname{im}\mathcal{P}) = \operatorname{im}\mathcal{P}$.

56.10. Указание. а) Использовать задачу 56.9.

56.12. Матрица порядка $n+1$: $\begin{bmatrix} O & A \\ O & O \end{bmatrix}$, где A – единичная матрица порядка $n-k+1$ при $k \leq n$, и нулевая матрица при $k > n$.

56.13. а) $(\mathcal{A}\mathcal{D})(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_1 t + 2a_2 t^2 + \ldots + n a_n t^n$;
б) $(\mathcal{D}\mathcal{A})(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_0 + 2a_1 t + \ldots + (n+1)a_n t^n$; в) $[\mathcal{D},\mathcal{A}] = \mathcal{I}$.

56.14. Указание. Доказать по индукции, используя результат задачи 56.13, пункт "в)".

56.15. Указание. Показать, что след матрицы коммутатора всегда равен нулю.

56.16. Пусть $\mathcal{A}$ невырожден. Тогда $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{AB} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{BA} = \mathcal{I}$. Но $\operatorname{tr}(\mathcal{B} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{BA}) = 0$, а $\operatorname{tr}\mathcal{I} \neq 0$.

56.21. Указание. Использовать результат задачи 55.32.

56.23. Указание. Использовать результат задачи 56.9.

56.25. Указание. Использовать результат задачи 56.9.

56.26. Указание. Воспользоваться результатами задач 56.8 и 56.9 и учесть, что если $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – проекторы, то $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = \mathcal{O}$, и следовательно, $2\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = [\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1] = \mathcal{O}$.

56.27. Указание. Использовать результат задачи 56.9.

56.28. Указание. б)⇒а) Домножить равенство $\mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_k = \mathcal{I}$ на $\mathcal{A}_i$ и воспользоваться результатом задачи 56.9. а)⇒в) Учесть, что в любом базисе e: $\operatorname{rg}(\mathcal{A}_i)_e = \operatorname{tr}(\mathcal{A}_i)_e$. в)⇒б) Показать, что $V = \operatorname{im}\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{im}\mathcal{A}_k$. Учитывая это, из равенства $\mathcal{A}_j x = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_j x + \ldots + \mathcal{A}_k\mathcal{A}_j x$ вывести, что $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$ и $\mathcal{A}_i^2 = \mathcal{A}_i$.

56.29. Указание. Использовать перестановочность оператора $\mathcal{A}$ с любым проектором.

56.30. Указание. Использовать результаты задач 55.31 и 56.29.

56.31. Указание. а) Перейти к матрицам операторов; б,в) применить теорему о ранге и дефекте.

56.32. Указание. а) Использовать соотношение $(\mathcal{BA})V = \mathcal{B}(\operatorname{im}\mathcal{A})$.

56.33. Указание. В силу пункта "б)" задачи 56.32 справедливо соотношение $\dim(\operatorname{im}\mathcal{A}^k \cap \ker\mathcal{A}) = \operatorname{def}\mathcal{A}^{k+1} - \operatorname{def}\mathcal{A}^k$.

56.34. Указание. Воспользоваться соотношением из пункта "б)" задачи 56.32.

56.35. Указание. Использовать соотношения: $\operatorname{rg}(\mathcal{BAC}) = \operatorname{rg}(\mathcal{AC}) - \dim(\operatorname{im}\mathcal{AC} \cap \ker\mathcal{B})$, $\operatorname{rg}(\mathcal{BA}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}) - \dim(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$.

56.36. Указание. Если $\mathcal{A}^2 \neq \mathcal{O}$, то использовать результат задачи 55.31.

56.37. Указание. а) Использовать неравенство Фробениуса из задачи 56.35.

56.38. Указание. Перейти к матрицам операторов в некотором базисе пространства V.

56.39. Указание. Построить оператор $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ так, чтобы включение $\ker\mathcal{A} \subset \ker\mathcal{A}^2$ было строгим.

56.40. Указание. Использоваться результаты задач 56.39 и 56.34.

56.41. Указание. а) Для операторов $\mathcal{A} + \mathcal{I}$ и $\mathcal{A} - \mathcal{I}$ воспользоваться результатами задач 55.23 и 56.37, пункт "б)".

56.42. Вообще говоря, нет.

56.44. Указание. Пусть $\operatorname{im}\mathcal{A} = \mathcal{L}(e_1)$. Проанализировать матрицу оператора $\mathcal{AB}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

56.45. $n(n-r)$. **56.46.** $n(n-r)$.

56.47. Указание. Учесть, что матрицы $\begin{bmatrix} \lambda I & A \\ O & \lambda I \end{bmatrix}$, где A – произвольная матрица порядка m, перестановочны.

56.48. Ранг равен nr, дефект равен $n(n-r)$.

56.53. Оператор, ставящий в соответствие каждой функции ее единственную первообразную, принадлежащую данному пространству.

56.54. $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$.

56.56. Указание. Выбрать базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства так, чтобы векторы $e_2, \ldots, e_n$ образовывали базис $\ker\mathcal{A}$, и рассмотреть матрицы операторов $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ и $\mathcal{I} + \mathcal{A}$ в этом базисе.

56.57. Указание. Использовать соотношение из пункта "а)" задачи 56.31.

56.57.1. Указание. Если $\mathcal{A}$ вырожден, то показать, что существует ненулевой вырожденный оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{AB} = \mathcal{O}$.

56.57.2. Указание. Если ненулевой оператор $\mathcal{A}$ вырожден, то показать, что существует ненулевой оператор $\mathcal{B}$, для которого $\mathcal{AB} = \mathcal{O}$ и $\mathcal{BA} \neq \mathcal{O}$.

56.58. См. указание к задаче 56.57.

56.62. Указание. Пусть $\mathcal{F}$ вырожден, тогда существует ненулевая матрица A такая, что $\mathcal{F}A = O$. Положим $r = \operatorname{rg} A$, тогда $0 < r < n$ и существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$. В таком случае для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ выполнено: $|PAQ+X|\cdot|PQ|^{-1} = |A + P^{-1}XQ^{-1}| = |\mathcal{F}(A + P^{-1}XQ^{-1})| = |\mathcal{F}(P^{-1}XQ^{-1})| = |X| \cdot |PQ|^{-1}$, т.е. $|PAQ + X| = |X|$. Но это неверно, если, например, $X = \begin{bmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix}$.

56.63. Указание. Если $x \in \ker \mathcal{A}$ ненулевой, то $f(\mathcal{A})x \neq \theta$ вопреки тому, что $f(t)$ – аннулирующий многочлен.

56.64. Указание. Учесть, что $\dim \mathcal{L}(V, V) = n^2$.

56.65. Указание. Использовать результат предыдущей задачи.

56.67. Да, если $\dim V = \dim W$; нет, если $\dim W > \dim V$.

56.70. Указание. Воспользоваться результатом задачи 56.9.

56.71. Указание. Выбрать базисы e в V и f в W, образующие каноническую пару базисов для оператора $\mathcal{A}$, и построить невырожденные матрицы P и Q так, чтобы $PB_{fe}Q = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, где $r = \operatorname{rg} \mathcal{B}$.

56.72. Указание. Использовать построение задачи 56.71.

56.73. Указание. Использовать построение задачи 56.71.

56.74. Указание. Использовать построение задачи 56.71.

56.76. а,б,в) Нет; д) нет при $d \neq 1$ и да при $d = 1$; г,е) да.

§57

57.1. Каждый оператор имеет одно собственное значение: а) $\lambda = 0$; б) $\lambda = 1$; в) $\lambda = \alpha$, если скалярный оператор равен $\alpha\mathcal{I}$. Собственными векторами являются все ненулевые векторы.

57.2. $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$, где A – диагональная матрица.

57.4. $n - r$.

57.6. Оператор $\mathcal{A} - \alpha\mathcal{I}$ имеет собственные значения $\lambda_k - \alpha$, где λ_k – собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

57.7. а) λ^2; б) λ^k; в) $f(\lambda)$. **57.8.** Нет, неверно.

57.9. Указание. Рассмотреть характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}^2 - \lambda^2\mathcal{I}$.

57.11. Да, равны.

57.14. Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет собственные значения λ_k^{-1}, где λ_k – собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

57.16. Да, равны.

57.17. Если λ – собственное значение матрицы A, то $\operatorname{Re}\lambda$ и $\operatorname{Im}\lambda$ суть собственные значения вещественной и мнимой частей матрицы A соответственно.

57.18. Если x – собственный вектор матрицы $B = S^{-1}AS$, то $y = Sx$ – собственный вектор матрицы A.

57.19. а) Нет; б) нет; в) нет. Указание. Сравнить следы, ранги, определители данных матриц.

57.20. а) A; б) A; в) A подобна D_2, B подобна D_1.

57.21. $J_3(-1)$. **57.22.** C.

57.23. Вообще говоря, нет. Верно лишь для $n = 1, 2$.

57.25. а) $f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1$; при $\varphi = 0$: собственное значение 1, собственным вектором является любой ненулевой вектор; при $\varphi = \pi$: собственное значение -1, собственным вектором является любой ненулевой вектор; при остальных φ собственных значений нет;

б) $f(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1)$; при любом φ есть собственное значение 1 и собственные векторы $\alpha\,\mathbf{a}$, $\alpha \neq 0$; кроме того, при $\varphi = 0$: для собственного значения 1 собственным вектором является любой ненулевой вектор; при $\varphi = \pi$: второе собственное значение -1, собственным вектором является любой ненулевой вектор, ортогональный $\mathbf{a}$;

в) $f(\lambda) = -\lambda^3 - |\mathbf{a}|^2\lambda$; собственное значение 0, соответствующие собственные векторы $\alpha\,\mathbf{a}$, $\alpha \neq 0$;

г) $f(\lambda) = (1-\lambda)^k(-\lambda)^{n-k}$, где $k = \dim L_1$, $n = \dim V$; собственное значение 1, собственным вектором является любой ненулевой вектор из L_1, и собственное значение 0, собственным вектором является любой ненулевой вектор из L_2;

д) $f(\lambda) = (1-\lambda)^k(-1-\lambda)^{n-k}$, где $k = \dim L_1$, $n = \dim V$; собственное значение 1, собственным вектором является любой ненулевой вектор из L_1, и собственное значение -1, собственным вектором является любой ненулевой вектор из L_2;

е) $f(\lambda) = (-\lambda)^{n+1}$; собственное значение 0, собственным многочленом является любой многочлен нулевой степени;

ж) $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$; собственных значений нет.

57.28. Указание. Воспользоваться следующими тождествами Ньютона: $ka_{n-k} + (\operatorname{tr} A)a_{n-k+1} + (\operatorname{tr} A^2)a_{n-k+2} + \ldots + (\operatorname{tr} A^k)a_n = 0$, $k = \overline{1,n}$, где $a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ – характеристический многочлен матрицы A.

57.29. $|A| = -2$. Указание. Найти собственные значения матрицы A.

57.31. $\lambda_1 = 3$, собственным вектором является любой ненулевой вектор.

57.32. $\lambda_1 = 2$, собственные векторы имеют вид $\alpha(1, 1+i)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.33. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(-5, 3+4i)^T$, $\alpha(1, -i)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.34. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(1,1,1)^T$, $\alpha(1,0,1)^T$, $\alpha(1,1,0)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.35. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(0,1,-1)^T$, $\alpha(3,4,2)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.36. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(-7,5,-6)^T + \beta(2,-1,1)^T$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, и $\alpha(1,1,-3)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.37. $\lambda_1 = 0$, собственные векторы равны $\alpha(1,1,0)^T + \beta(0,1,2)^T$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

57.38. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(0,2,1)^T$, $\alpha(1,1,-1)^T$, $\alpha(2,2,-1)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.39. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(2,1,0)^T + \beta(1,0,-1)^T$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, и $\alpha(3,5,6)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.40. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 3$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(1,-3,3,-1)^T$, $\alpha(1,-1,-1,1)^T$, $\alpha(1,1,-1,-1)^T$, $\alpha(1,3,3,1)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.41. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(0,1,0,-1)^T$, $\alpha(0,1,0,1)^T$, $\alpha \neq 0$.

57.42. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(2,-1,0,0)^T + \beta(3,0,0,-1)^T$ и $\alpha(1,-1,0,1)^T + \beta(0,0,1,0)^T$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

57.43. $\lambda_1 = 3$, собственные векторы равны $\alpha(1,0,0,-1)^T + \beta(0,0,1,0)^T$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

57.44. а) Нет собственных значений; б) $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$.

57.45. а) $\lambda_1 = 2$; б) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = (1 \pm i\sqrt{3})/2$.

57.46. а) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$; б) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_{3,4} = 2 \pm i$.

57.47. а) Нет собственных значений; б) $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$.

Указание. Ко 2-й строке определителя $|A - \lambda I|$ прибавить 3-ю строку.

57.48. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_{3,4} = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

57.49. Собственное значение λ_0 алгебраической кратности n, собственные векторы равны αe_1, $\alpha \neq 0$.

57.51. Указание. При доказательстве необходимости использовать результат предыдущей задачи.

57.52. $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \cap \mathbb{R}$.

57.53. $\lambda_1 = 0$, собственные векторы равны $\alpha(1,1,0,1)^T + \beta(0,1,1,0)^T$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

57.54. $\lambda_1 = 0$, собственные векторы равны $\alpha(1,0,0,-1)^T + \beta(0,2,1,0)^T$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

57.55. $\lambda_1 = 2$, собственные векторы равны $\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

57.56. а) $\lambda_1 = 0$, собственные векторы равны $\alpha I + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$;

б) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2$, собственные векторы соответственно равны $\alpha I + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, $\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\alpha \neq 0$;

в) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$, собственные векторы соответственно равны $\alpha I + \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $\alpha \begin{bmatrix} \pm i & 1 \\ 1 & \mp i \end{bmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

57.57. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, собственные векторы соответственно равны $\alpha(1-2t+t^2) + \beta(-2+7t-5t^3)$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, $\alpha(t^2-t^3)$, $\alpha \neq 0$.

57.58. $\lambda_1 = 0$, собственными векторами являются все ненулевые векторы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$, ортогональные вектору y: $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0$, и $\lambda_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, собственными векторами являются векторы βx, $\beta \neq 0$.

57.59. $\lambda_1 = 0$, собственными векторами являются все ненулевые векторы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$: $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0$, и $\lambda_2 = n$, собственными векторами являются векторы $\beta(1, \ldots, 1)^T$, $\beta \neq 0$.

57.60. $\lambda_1 = 0$, собственными векторами являются все ненулевые векторы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$: $\dfrac{\alpha_1}{\mu_1} + \ldots + \dfrac{\alpha_n}{\mu_n} = 0$, и $\lambda_2 = n$, собственными векторами являются векторы $\beta(\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$, $\beta \neq 0$.

57.61. а) $\lambda_1 = a - b$, $\lambda_2 = a + b(n-1)$, соответствующие собственные векторы те же, что и в задаче 57.59;

б) пусть $q = \sqrt[n]{a/b}$, тогда $\lambda_k = b\dfrac{q\varepsilon_k - q^n}{1 - q\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, $k = \overline{0, n-1}$. Собственные векторы, отвечающие λ_k, имеют вид $\alpha(1, p_k, p_k^2, \ldots, p_k^{n-1})^T$, где $p_k = (b + \lambda_k)/(a + \lambda_k)$, $\alpha \neq 0$.

57.62. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{a^2 + 4(b_1c_1 + \ldots + b_{n-1}c_{n-1}}\right]$.

57.63. Например, $(1, 1, \ldots, 1)^T$.

57.64. Указание. Учесть, что A и A^T имеют одинаковые собственные значения, и сравнить суммы модулей компонент вектор-столбцов в левой и правой частях равенства $A^T x = \lambda x$.

57.65. Если $n = 2k$, то $\pm\sqrt{\alpha_1\alpha_n}$, $\pm\sqrt{\alpha_2\alpha_{n-1}}$, ..., $\pm\sqrt{\alpha_k\alpha_{k+1}}$; если $n = 2k+1$, то $\pm\sqrt{\alpha_1\alpha_n}$, $\pm\sqrt{\alpha_2\alpha_{n-1}}$, ..., $\pm\sqrt{\alpha_k\alpha_{k+2}}$, α_{k+1}.

57.66. При $n = 4k+1$: $\lambda_1 = \sqrt{n}$ кратности $k+1$, $\lambda_2 = -\sqrt{n}$ кратности k, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{n}i$ кратностей k. При $n = 4k+3$: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n}$ кратностей $k+1$, $\lambda_3 = \sqrt{n}i$ кратности $k+1$, $\lambda_4 = -\sqrt{n}i$ кратности k. Указание. Рассмотреть квадрат данной матрицы.

57.67. а) $(-\lambda)^n - (-1)^n$; б) собственному значению $\lambda_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ отвечают собственные векторы $\alpha(1, \lambda_k, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^{n-1})^T$, $\alpha \neq 0$ $(k = \overline{0, n-1})$.

57.68. $\lambda_k = f(\varepsilon_k)$, где $f(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}$, $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, $k = \overline{0, n-1}$. Указание. Воспользоваться задачей 43.27.

57.69. а) $\lambda_k = 2i\cos(k\pi/(n+1))$, $k = \overline{1, n}$; б) $\lambda_k = a + 2b\cos(k\pi/(n+1))$, $k = \overline{1, n}$. Указание. См. ниже решение в примере 69.1 (§69).

57.70. Указание. а) Воспользоваться симметричностью матрицы A; б) воспользоваться рекуррентным соотношением для $D_n = |A - \lambda I|$: $D_n = (a_n - \lambda)D_{n-1} - b_{n-1}^2 D_{n-2}$ и показать, что если $D_n = 0$, то $D_{n-1} \neq 0$.

57.71. Указание. Рекуррентное соотношение

$$D_k(\lambda) = (a_k - \lambda)D_{k-1}(\lambda) - b_{k-1}c_{k-1}D_{k-2}(\lambda)$$

для $D_k(\lambda) = \det(A_k - \lambda I)$ показывает, что $D_n(\lambda)$ зависит не от самих чисел b_k, c_k, а лишь от их произведений. Поэтому, заменив в A_n элементы b_k и c_k на $\sqrt{b_kc_k}$, получим симметрическую матрицу A_n' с тем же характеристическим многочленом.

57.72. а) Нет; б) нет. Указание. Рассмотреть след и ранг данных матриц.

57.73. а) $\lambda_k = k-1$, $k = \overline{1, n+1}$, соответствующие собственные векторы равны $f_k(t) = \alpha t^{k-1}$, $\alpha \neq 0$;

б) при $n = 2k$: $\lambda_{1,2} = \pm 1$, соответствующие собственные векторы равны $\alpha_1(1 + t^n) + \alpha_2(t + t^{n-1}) + \ldots + \alpha_k(t^{k-1} + t^{k+1}) + \alpha_{k+1}t^k$ и $\alpha_1(1 - t^n) + \alpha_2(t - t^{n-1}) + \ldots + \alpha_k(t^{k-1} - t^{k+1})$; при $n = 2k+1$: $\lambda_{1,2} = \pm 1$, соответствующие собственные векторы равны $\alpha_1(1 \pm t^n) + \alpha_2(t \pm t^{n-1}) + \ldots + \alpha_k(t^k \pm t^{k+1})$ (при условии, что не все коэффициенты α_i равны нулю);

в) $\lambda_1 = 1$, собственные векторы равны $f(t) = \alpha$, $\alpha \neq 0$;

г) $\lambda_k = 1/k$, $k = \overline{1, n+1}$, соответствующие собственные векторы равны $f_k(t) = \alpha t^{k-1}$, $\alpha \neq 0$;

д) $\lambda_k = 1/(k+1)$, $k = \overline{1, n+1}$, соответствующие собственные векторы равны $f_k(t) = \alpha t^{k-1}$, $\alpha \neq 0$;

е) $\lambda_1 = 0$, собственные векторы равны $f(t) = \alpha$, $\alpha \neq 0$;

ж) $\lambda_1 = 0$, собственные векторы равны $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \alpha_{2k}(t-a)^{2k}$, где не все коэффициенты α_{2k} равны нулю;

з) $\lambda_1 = 1$, собственными векторами являются все ненулевые многочлены из M_k.

57.76. Вообще говоря, нет.

57.77. Симметрические и кососимметрические ненулевые матрицы.

57.78. б) Ненулевые матрицы вида $[x_1\, x_2 \ldots x_n]$, где x_i – линейная комбинация собственных вектор-столбцов $a_1, \ldots, a_k$.

57.79. б) Собственному значению λ соответствуют ненулевые матрицы вида $[x_1\, x_2 \ldots x_n]^T$, где x_i – либо один из собственных вектор-столбцов матрицы B^T, отвечающих λ, либо нулевой столбец.

57.80. $\lambda_k \mu_l$, $k, l = \overline{1, n}$. Указание. Учесть, что матрицы A и B подобны диагональным матрицам.

57.81. а) $\lambda\mu$; б) $\lambda + \mu$.

57.82. а) $\lambda_k \lambda_l$; б) λ_k/λ_l; в) $\lambda_k - \lambda_l$ $(k, l = \overline{1, n})$. Указание. См. задачу 52.55.

57.82.1. Нет. Указание. Пусть матрица A такова, что $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$. Тогда, например, для оператора $\mathcal{F}$ из пункта "а)" матрицы $x_1 x_2^T$ и $x_3 x_4^T$ являются собственными векторами, отвечающими одному собственному значению. Если $\lambda_1 \neq \lambda_3$ и $\lambda_2 \neq \lambda_4$, то эти матрицы линейно независимы, и следовательно, собственный вектор $x_1 x_2^T + x_3 x_4^T$ является матрицей ранга 2. Однако $\operatorname{rg}(x_i x_j^T) = 1$.

57.83. а) $\lambda_k \mu_l$; б) $\lambda_k + \mu_l$ $(k, l = \overline{1, n})$. Указание. См. задачу 52.55.

57.83.1. Нет. Указание. См. задачу 57.82.1.

57.84. 1) Пусть A невырождена. Тогда если x – собственный вектор матрицы AB, то $A^{-1}x$ – собственный вектор матрицы BA. 2) Нет, неверно.

57.85. Указание. Если одна из матриц A или B невырождена, то воспользоваться предыдущей задачей. Если обе матрицы A и B вырождены, то выбрать последовательность $\varepsilon_k \to 0$ так, чтобы матрицы $A_k = A - \varepsilon_k I$ были невырождены, и применить предельный переход.

57.86. Указание. Использовать равенство

$$\begin{bmatrix} AB - \lambda I_m & A \\ O & -\lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda I_m & A \\ O & BA - \lambda I_n \end{bmatrix}.$$

57.87. Указание. Использовать равенства:

а) $\begin{bmatrix} I & I \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ B & A - \lambda I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B - \lambda I & O \\ B & A - B - \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ O & I \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} I & iI \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ -B & A - \lambda I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - iB - \lambda I & O \\ -B & A + iB - \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & iI \\ O & I \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} A^2 + B^2 & AB - BA \\ BA - AB & A^2 + B^2 \end{bmatrix}$.

57.88. Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда главная подматрица расположена в левом верхнем углу. В этом случае показать, что собственному значению λ матрицы A соответствует хотя бы один собственный вектор вида $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$.

57.89. Указание. Показать, что найдется $\lambda \in \mathbb{R}$, при котором матрицы $A \pm \lambda I$ невырождены.

57.90. Указание. Рассмотреть матрицы B вида $A - \varepsilon I$.

57.93. 1) $1 + (-1)^n$; 2) 0; 3) $\sqrt{n}$ при $n = 4k+1$, $i\sqrt{n}$ при $n = 4k+3$; 4) $i^{(n-1)(3n-2)/2} n^{n/2}$. Указание. Использовать задачи 57.66 и 57.69, пункт "а)".

§58

58.2. а) $\{2,1\}$, $\{1,3\}$; б) $\{-2,3\}$, $\{1,1\}$; в) $\{3,1,0\}$, $\{0,0,1\}$, $\{-1,3,1\}$; г) $\{1,1,-1\}$, $\{2,-1,0\}$, $\{1,0,1\}$.

58.6. Указание. Воспользоваться тем, что каждое собственное подпространство одномерно.

58.7. Указание. Учесть, что если D – диагональная матрица с различными диагональными элементами, то любую диагональную матрицу можно представить многочленом от D.

58.10. Нет, неверно. Указание. Рассмотреть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, имеющие в некотором базисе e матрицы $A_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

58.11. а,б) Нет. **58.12.** Нет. **58.13.** Да. **58.14.** Нет.
58.15. Нет. **58.16.** Да. **58.17.** Да. **58.18.** Да.
58.19. Нет. **58.20.** Нет. **58.21.** Да. **58.22.** Нет.
58.23. Да. **58.24.** Нет. **58.25.** Да. **58.26.** Да.
58.27. Нет. **58.28.** Да. **58.29.** а) Нет; б) да.
58.30. а) Нет; б) нет.
58.31. а) Да, только если $\alpha = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; б) да.
58.32. а) Нет; б) да. **58.33.** а) Нет; б) да.
58.34. а) Нет; б) нет. **58.35.** а) Нет; б) нет.
58.36. а) Нет; б) да. **58.37.** а) Нет; б) да.
58.38. а) Нет; б) нет.

58.39. 1) $\lambda_1 = -c$, $\lambda_2 = -b-c$, $\lambda_{k+1} = k(k-1) - bk - c$, $k = \overline{2,n}$. 2) При всех $b, c \in \mathbb{R}$.

58.40. $\begin{bmatrix} I_{n-r} & O \\ O & -I_r \end{bmatrix}$, где $r = [n/2]$.

58.41. $\operatorname{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, где $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$.

58.42. $\operatorname{diag}(x + (n-1)y, x - y, \ldots, x - y)$.

58.43. $\operatorname{diag}(0, \ldots, 0, n)$. **58.44.** $\operatorname{diag}(n-1, n-3, \ldots, 1-n)$.

58.45. $\operatorname{diag}\left(2\cos\frac{\pi}{n+1}, 2\cos\frac{2\pi}{n+1}, \ldots, 2\cos\frac{n\pi}{n+1}\right)$.

58.46. $\operatorname{diag}\left(2i\cos\frac{\pi}{n+1}, 2i\cos\frac{2\pi}{n+1}, \ldots, 2i\cos\frac{n\pi}{n+1}\right)$.

58.47. а) $\operatorname{diag}(2I_m, -2I_m)$ при $n = 2m$, $\operatorname{diag}(2I_{m-1}, 1, -2I_{m-1})$ при $n = 2m-1$; б) матрица не диагонализуема; в) $\operatorname{diag}(iI_m, -iI_m)$ при $n = 2m$, $\operatorname{diag}(iI_{m-1}, 1, -iI_{m-1})$ при $n = 2m-1$.

58.48. Элементы α_k и α_{n-k+1} должны либо оба быть отличными от нуля, либо оба обращаться в нуль ($k = \overline{1,n}$).

58.50. $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(2, -2, \sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

58.51. Матрица не имеет простую структуру.

58.52. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(1,1,2,2)$.

58.53. Матрица не имеет простую структуру.

58.54. Матрица не имеет простую структуру.

58.55. Матрица не имеет простую структуру.

58.55.1. $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(4,4,-4,1)$.

58.55.2. Матрица не имеет простую структуру.

58.56. $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(1,2,3)$.

58.57. $T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(2,\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

58.58. $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2+2i & 2-2i \\ 2 & 8+2i & 8-2i \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(1,2+3i,2-3i)$.

58.59. Матрица не имеет простую структуру.

58.60. $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(1,2,2)$.

58.61. $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(2,2,2,-2)$.

58.63. $x^T y \neq 0$.

58.65. Нет. Указание. Показать, что ранг сопровождающей матрицы не меньше $n-1$.

58.69. Собственные векторы для каждого λ_k, $k = \overline{1,n}$, имеют вид $\alpha(\lambda_k^{n-1}, \lambda_k^{n-2}, \ldots, \lambda_k, 1)^T$, $\alpha \neq 0$.

58.70. Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда α – собственное значение матрицы A. Пусть его алгебраическая кратность равна k. Тогда $\operatorname{rg}(A-\alpha I) = n-k$. Так как характеристический многочлен матрицы $A-\alpha I$ имеет k-кратный корень, равный нулю, то в нем коэффициент при λ^k отличен от нуля. Следовательно, среди главных миноров порядка $n-k$ есть ненулевой.

58.72. $\operatorname{tr} B = (144+6^{29})/5$. Указание. Воспользоваться задачей 58.5.

58.73. $\begin{bmatrix} 3\cdot 2^{100} - 2\cdot 3^{100} & 2(3^{100}-2^{100}) \\ -3(3^{100}-2^{100}) & 3^{101}-2^{101} \end{bmatrix}$.

58.74. $\begin{bmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{bmatrix}$.

58.75. $\begin{bmatrix} 3\cdot 2^{100} - 2\cdot 3^{100} & 3(3^{100}-2^{100}) \\ -2(3^{100}-2^{100}) & 3^{101}-2^{101} \end{bmatrix}$. Указание. Воспользоваться задачей 9.69, пункт "б)".

58.76. а) 4; б) -8.

58.77. а) При $a > -5/4$; б) при $a \neq -5/4$; в) при $a = (k^2-5)/4$, $k \in \mathbb{N}$.

58.79. Указание. Использовать задачи 53.32 и 57.81.

58.80. Указание. Использовать задачи 52.55, 57.83 и 58.79.

§59

59.5. Нет.

59.8. Указание. Взять в качестве первого столбца матрицы преобразования собственный вектор-столбец матрицы A.

59.9. Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, то ненулевые инвариантные подпространства натянуты на всевозможные подсистемы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$. Число инвариантных подпространств равно 2^n.

59.10. Пусть V является прямой суммой собственных подпространств оператора $\mathcal{A}$: $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_p$. Тогда любое инвариантное подпространство L имеет вид $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$, где L_i – некоторое подпространство в W_i.

59.11. а) Все подпространства; б,в) все подпространства вида $L = M_1 \oplus M_2$, где M_1, M_2 – подпространства в L_1, L_2 соответственно; г) нулевое подпространство и V_2; д) нулевое подпространство, $\mathcal{L}(\mathbf{a})$, $\mathcal{L}^{\perp}(\mathbf{a})$ и V_3; е) все подпространства вида $L = M_1 \oplus M_2$, где M_1, M_2 – подпространства в подпространствах симметрических и кососимметрических матриц соответственно; ж) подпространства M_k, $k = \overline{0,n}$, и нулевое подпространство; з,и) линейная оболочка любого множества одночленов из M_n.

59.12. Кроме тривиальных инвариантных подпространств $\{\theta\}$ и V имеются следующие инвариантные подпространства: а) $\mathcal{L}((2,-1)^T)$, $\mathcal{L}((1,-1)^T)$; б) $\mathcal{L}((-1,2)^T)$; в) $\mathcal{L}(a_k)$, $\mathcal{L}(a_i, a_k)$, $1 \leq i < k \leq 3$, где $a_1 = (0,1,1)^T$, $a_2 = (1,-1,-1)^T$, $a_3 = (1,-1,-2)^T$; г) $\mathcal{L}(a_1)$, $\mathcal{L}(a_3)$, $\mathcal{L}(a_1, a_2)$, $\mathcal{L}(a_1, a_3)$, где $a_1 = (0,1,-1)^T$, $a_2 = (1,-1,0)^T$, $a_3 = (3,4,2)^T$; д) любое подпространство в $\mathcal{L}(a_1, a_2)$, где $a_1 = (1,1,0)^T$, $a_2 = (2,1,-2)^T$, и любое подпространство, содержащее $\mathcal{L}(a_2)$; е) любое подпространство в $\mathcal{L}(a_1, a_2)$, где $a_1 = (1,1,0)^T$, $a_2 = (1,0,-1)^T$, и любое подпространство, содержащее $\mathcal{L}(a_3)$, где $a_3 = (2,2,-1)^T$; ж) $\mathcal{L}(a_1)$, где $a_1 = (1,1,1)^T$, любое подпространство в $\mathcal{L}(a_2, a_3)$, где $a_2 = (1,-1,0)^T$, $a_3 = (0,1,-1)^T$, подпространства вида $\mathcal{L}(a_1, a)$, где a – любой вектор из $\mathcal{L}(a_2, a_3)$; з) $\mathcal{L}(a_1)$, где $a_1 = (1,2,3)^T$, любое подпространство в $\mathcal{L}(a_2, a_3)$, где $a_2 = (2,-1,0)^T$, $a_3 = (3,0,-1)^T$, подпространства вида $\mathcal{L}(a_1, a)$, где a – любой вектор из $\mathcal{L}(a_2, a_3)$.

59.13. Скалярный оператор. Указание. См. задачу 57.51.

59.15. Оператор дифференцирования в M_n.

59.16. Либо V – одномерное комплексное или вещественное пространство и $\mathcal{A}$ – любой оператор, либо V – двумерное вещественное пространство и $\mathcal{A}$ – любой оператор с пустым спектром.

59.17. Указание. Найти спектр $\mathcal{A}$.

59.19. Указание. Выбрать базис в V так, чтобы векторы $e_1, \ldots, e_k$ образовывали базис L, а $e_{k+1}, \ldots, e_n$ были собственными, и, рассмотрев матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, воспользоваться теоремой 58.3.

59.21. Указание. Рассмотреть индуцированный оператор $\mathcal{A}|L$.

59.22. Вообще говоря, нет. При условии, что индуцированный на L оператор имеет собственное значение 1.

59.26. Указание. Использовать задачу 59.25.

59.29. а) $\dim L = 2$ и $\mathcal{A}$ имеет единственное собственное значение геометрической кратности 1; б) $\dim V = 2$ и $\mathcal{A}$ имеет два различных собствен-

ных значения или $\dim V = 3$ и $\mathcal{A}$ имеет единственное собственное значение геометрической кратности 1.

59.31. Указание. Использовать задачу 59.25.

59.32. Искомые инвариантные подпространства определяются уравнениями: а) $(2\alpha + 3\beta)x_1 - \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$ ($|\alpha| + |\beta| \neq 0$); б) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$; в) $x_1 - x_2 = 0$; г) $x_1 + 2x_2 \pm (x_3 + 2x_4) = 0$; д) $x_1 + x_3 \pm (x_2 + x_4) = 0$; е) $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$. Указание. В пункте "е)" воспользоваться тем, что кососимметрическая матрица нечетного порядка вырождена.

59.35. а) $\mathcal{L}((0,1,1)^T, (2,1,0)^T)$; б) $\mathcal{L}((1,-1,-1,0)^T, (0,0,0,1)^T)$; в) $\mathcal{L}\big((0,0,1,-2)^T, (0,0,1,0)^T\big), \mathcal{L}\big((-1,1,\alpha-\beta,-2-2\alpha)^T, (-1,0,\alpha+\beta,-2\beta)^T\big)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; г) $\mathcal{L}\big((1,1,1,0)^T, (0,1,0,0)^T\big), \mathcal{L}\big((1,-1,4,3)^T, (-1,0,2,0)^T\big)$.

59.37.1. а) Либо $\dim V = 2$ и $\mathcal{A}$ имеет единственное собственное значение геометрической кратности 1, либо $\dim V = 4$, характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ имеет кратные комплексные корни и матрица A_e не диагонализуема над $\mathbb{C}$; б) либо $\dim V = 3$ и $\mathcal{A}$ имеет единственное собственное значение алгебраической и геометрической кратностей 1, либо $\dim V = 3$, характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ имеет единственный корень, который вещественный и как собственное значение имеет геометрическую кратность 1, либо $\dim V = 4$, характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ имеет лишь простые комплексные корни.

59.37.2. Да, может – см. задачу 59.35, пункт "в)".

59.39. В пункте "г)" матрица A к треугольному виду не приводится. В остальных пунктах решение не единственно; если $B = S^{-1}AS$ – требуемый треугольный вид, то:

а) $B = \begin{bmatrix} 0 & -25 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

д) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

е) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

59.40. 2. Если $k_1, \ldots, k_r$ – порядки диагональных блоков, то $\dim L_j = k_1 + \ldots + k_j$, $j = \overline{1,r}$.

59.40.1. $f(\lambda)\overline{f}(\lambda)$. Указание. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства $\mathbb{C}^n$, в котором A_e имеет верхнюю треугольную форму. Построить матрицу оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}})$ в базисе $e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n$ (см. задачу 44.71) и заметить, что эта матрица является верхней квазитреугольной с диагональными клетками второго порядка.

59.41. $L_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$, $k = \overline{1,n}$.

59.43. Указание. См. задачу 59.42.

59.44. Указание. Использовать задачу 59.43.

59.46. Указание. См. задачу 59.45.

59.47. Указание. См. задачу 59.43.

59.48. Указание. Учесть, что если $\dim V = n$, то в G содержится не более n^2 линейно независимых операторов, и использовать задачу 59.43.

59.50. 2. $\lambda_i + \lambda_j$, $1 \le i < j \le n$. Указание. Учесть, что если x_i – собственный вектор матрицы A^T, отвечающий собственному значению λ_i, то матрица $x_i x_j^T + x_j x_i^T$ – собственный вектор оператора $\mathcal{F}$, отвечающий собственному значению $\lambda_i + \lambda_j$.

59.52. При $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, оператор $\mathcal{G}|L$ единичный и $\lambda = 1$, все ненулевые матрицы порядка 2 собственные. При $\alpha = (\pi/2) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, есть собственное значение $\lambda = 1$ с собственной матрицей I для пункта "а)" и $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ для пункта "б)" и собственное значение $\lambda = -1$ с ненулевыми собственными матрицами вида $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ для обоих пунктов. При $\alpha \ne \pi k/2$ есть собственное значение $\lambda = 1$ с собственной матрицей I для пункта "а)" и $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ для пункта "б)".

59.53. 2. Да, может.

59.55. Указание. Пусть $\mathcal{A}e_1 = \theta$, $e_1 \ne \theta$, тогда e_1 – собственный вектор и оператора $\mathcal{B}$ с некоторым собственным значением λ. Векторы $e_1, \dots, e_n$ такие, что $\mathcal{A}e_{k+1} = e_k$, $k = \overline{1, n-1}$, линейно независимы, причем эти векторы можно подобрать так, чтобы $\mathcal{B}e_k = (\lambda - k + 1)e_k$, $k = \overline{1, n}$.

59.56. Существует базис пространства, в котором матрицы обоих операторов – треугольные одинакового вида. Указание. Показать, что любое подпространство $L \supset \operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$ инвариантно относительно $\mathcal{B}$.

59.57. Указание. Привести каждую из матриц A и B подобным преобразованием к верхней треугольной форме.

59.59. $n + 1$.

59.61. Указание. Для обоснования достаточности рассмотреть треугольную форму матрицы этого оператора.

59.67. Указание. В каждой паре инвариантных подпространств одно вложено в другое.

§60

60.2. Указание. Рассмотреть образы векторов под действием операторов $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})^q$ и $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})^{q-1}$ и учесть, что вектор $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})^{q-1}x$ является собственным.

60.4. Указание. Использовать задачу 60.3.

60.9. $J_q(\lambda)$. **60.10.** $[J_q(\lambda)]^T$.

60.16. Указание. Воспользоваться тем, что оператор простой структуры не имеет корневых векторов высоты $k > 1$.

60.17. $K_0 = \mathcal{L}((0,1,-1)^T)$, $K_1 = \mathcal{L}((1,0,1)^T, (0,1,0)^T)$.

60.18. $K_{-1} = \mathbb{R}^3$.

60.19. $K_2 = \mathcal{L}((2,-1,0,0)^T, (1,0,1,0)^T, (2,0,0,1)^T)$,
$K_{-2} = \mathcal{L}((0,1,0,-1)^T)$.

60.20. $K_{-1} = \mathcal{L}((1,1,0,0)^T, (0,0,1,1)^T)$,
$K_1 = \mathcal{L}((3,1,0,0)^T, (0,0,3,1)^T)$.

60.20.1. а) $K_0 = \mathcal{L}(1-t, 2t-3t^2+t^3)$, $K_2 = \mathcal{L}(1, t^2)$; б) $K_0 = \mathcal{L}(1, 2t-t^2)$, $K_2 = \mathcal{L}(t, t^3)$; в) $K_0 = \mathcal{L}(1-2t, t-3t^2+2t^3)$, $K_2 = \mathcal{L}(1, t+t^2)$; г) $K_0 = \mathcal{L}(1+2t, t-3t^2-2t^3)$, $K_2 = \mathcal{L}(1, t-t^2)$.

60.22. $[J_n(\lambda_0)]^T$.

60.23. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$, где a_k, $k = \overline{0, n-1}$, – коэффициенты многочлена $(\lambda - \lambda_0)^n = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.

60.24. $e_1 = (4, -4)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

60.25. $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (1, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

60.26. $e_1 = (1, 1, -1)^T$, $e_2 = (-4, -5, 6)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

60.27. $e_1 = (1, -1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, -1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1, -1)^T$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

60.28. $e_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$, $e_2 = (3, 2, 1, 0, -1)^T$, $e_3 = (3, 1, 0, 0, 1)^T$, $e_4 = (1, 0, 0, 0, -1)^T$, $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.29. $J_n(-1)$. **60.30.** $J_n(1)$. **60.31.** $J_n(9)$. **60.32.** $J_n(1)$.

60.33. $J_n(1)$. **60.34.** $J_n(2)$. **60.35.** $J_n(\alpha)$.

60.36. $D_J = J_{n+1}(0)$, канонический базис $1, t, t^2/2!, \dots, t^n/n!$.

60.38. Указание. Рассмотреть максимальную высоту корневых векторов.

60.40. Указание. Сравнить с задачами 59.11, пункт "ж)" и 59.41.

60.41. Указание. Использовать задачи 60.2, д) и 60.40.

60.45. $e_1 = (-1, -1, 3, -3)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 2, -2)^T$, $e_4 = (0, 0, 1, 0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

60.46. $e_1 = (-2, 2, 1, 2)^T$, $e_2 = (0, 0, 1, 1)^T$, $e_3 = (1, 2, 1, -1)^T$, $e_4 = (1, 1, 0, 0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.47. $e_1 = (0, 0, 13, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)^T$, $e_3 = (13, 0, 0, 0)^T$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 99 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 99 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{bmatrix}$.

60.48. $e_1 = (1,2,1,0,0,0)^T$, $e_2 = (-2,-3,-1,0,0,0)^T$, $e_3 = (1,0,0,0,0,0)^T$, $e_4 = (0,0,0,1,2,1)^T$, $e_5 = (0,0,0,1,1,0)^T$, $e_6 = (0,0,0,1,0,0)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

60.49. $e_1 = (0,0,0,0,-1,0)^T$, $e_2 = (1,0,0,0,0,0)^T$, $e_3 = (0,0,0,-3,0,0)^T$, $e_4 = (0,1,0,0,0,0)^T$, $e_5 = (0,0,0,0,0,-5)^T$, $e_6 = (0,0,1,0,0,0)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

60.50. Жордановой формой будет матрица $\operatorname{diag}(J_{k+1}(0), J_{k+1}(0))$, каноническим базисом, – например, базис

$$1, \frac{1}{2!}t^2, \frac{1}{4!}t^4, \ldots, \frac{1}{(2k)!}t^{2k}, t, \frac{1}{3!}t^3, \frac{1}{5!}t^5, \ldots, \frac{1}{(2k+1)!}t^{2k+1}.$$

60.51. $e_1 = (2,2,2)^T$, $e_2 = (1,0,0)^T$, $e_3 = (1,0,-2)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

60.52. $e_1 = (1,-2,1)^T$, $e_2 = (1,0,0)^T$, $e_3 = (0,1,-1)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

60.53. $e_1 = (1,1,3,4)^T$, $e_2 = (1,0,0,0)^T$, $e_3 = (-1,-1,0,-1)^T$, $e_4 = (0,1,0,0)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

60.54. $e_1 = (1,-7,4,2)^T$, $e_2 = (0,0,1,0)^T$, $e_3 = (7,1,8,4)^T$, $e_4 = (0,0,0,-1)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

60.55. $e_1 = (1,1,1,1)^T$, $e_2 = (1,0,0,0)^T$, $e_3 = (0,1,1,0)^T$, $e_4 = (0,0,1,-1)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

60.56. $e_1 = (24,0,0,0,0)^T$, $e_2 = (5,7,8,0,0)^T$, $e_3 = (0,0,0,0,1)^T$, $e_4 = (4,6,0,0,0)^T$, $e_5 = (0,0,0,1,0)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

60.57. $e_1 = (1,1,1,1,1)^T$, $e_2 = (0,-1,0,0,0)^T$, $e_3 = (1,1,0,1,1)^T$, $e_4 = (0,0,0,-1,0)^T$, $e_5 = (0,0,0,0,1)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

60.57.1. $e_1 = (-2,0,2,2)^T$, $e_2 = (0,-1,1,1)^T$, $e_3 = (1,0,0,0)^T$, $e_4 = (0,1,-1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

60.57.2. $e_1 = (-4,2,0,0,0)^T$, $e_2 = (4,-3,0,0,0)^T$, $e_3 = (0,1,1,-1,-2)^T$, $e_4 = (0,0,0,0,1)^T$, $e_5 = (1,0,-2,1,3)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

60.57.3. $e_1 = (1,2,2,1,1)^T$, $e_2 = (1,0,0,0,0)^T$, $e_3 = (0,2,1,0,0)^T$, $e_4 = (0,0,1,1,0)^T$, $e_5 = (0,0,0,1,2)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

60.58. Жордановой формой будет матрица $\operatorname{diag}(J_{k+1}(0), J_k(0))$, каноническим базисом, – например, базис

$$1, \frac{1}{2!}t^2, \frac{1}{4!}t^4, \ldots, \frac{1}{(2k)!}t^{2k}, t, \frac{1}{3!}t^3, \frac{1}{5!}t^5, \ldots, \frac{1}{(2k-1)!}t^{2k-1}.$$

60.59. Нет, так как $n_4 - n_3 = 2 > n_3 - n_2 = 1$, где $n_k = 8 - r_k$.

60.60. $e_1 = (0,0,1)^T$, $e_2 = (1,2,0)^T$, $e_3 = (0,1,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

60.61. $e_1 = (1,1,1)^T$, $e_2 = (6,9,9)^T$, $e_3 = (0,-1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

60.62. $e_1 = (1,1,1)^T$, $e_2 = (6,2,2)^T$, $e_3 = (0,1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.63. $e_1 = (-2,2,2)^T$, $e_2 = (1,1,-1)^T$, $e_3 = (0,1,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

60.64. $e_1 = (1,1,0)^T$, $e_2 = (0,1,1)^T$, $e_3 = (-1,2,2)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

60.65. $e_1 = (-4,-3,-4)^T$, $e_2 = (2,2,-1)^T$, $e_3 = (1,0,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

60.66. $e_1 = (1,-1,2)^T$, $e_2 = (0,0,-1)^T$, $e_3 = (0,1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.67. $e_1 = (1,2,2)^T$, $e_2 = (1,2,1)^T$, $e_3 = (-1,-1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.68. $e_1 = (2,2,2,2)^T$, $e_2 = (0,-1,0,-1)^T$, $e_3 = (4,4,0,0)^T$, $e_4 = (1,0,0,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.69. $e_1 = (-2,-1,0,0)^T$, $e_2 = (1,0,-2,3)^T$, $e_3 = (0,0,1,0)^T$, $e_4 = (0,0,0,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.70. $e_1 = (2,1,0,0)^T$, $e_2 = (-21,-10,0,0)^T$, $e_3 = (0,0,3,-2)^T$, $e_4 = (8,3,-1,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

60.71. $e_1 = (1,0,1,1)^T$, $e_2 = (0,3,-3,0)^T$, $e_3 = (0,0,1,0)^T$, $e_4 = (1,0,1,-1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

60.72. $e_1 = (0,-1,0,2)^T$, $e_2 = (-2,5,-1,-10)^T$, $e_3 = (-1,0,0,7)^T$, $e_4 = (0,-1,0,3)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

60.73. $e_1 = (3,3,-3,-3)^T$, $e_2 = (1,0,-1,0)^T$, $e_3 = (-3,-3,-3,-3)^T$, $e_4 = (1,0,1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

60.74. $e_1 = (2,2,-2,-2)^T$, $e_2 = (0,1,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,0,1)^T$, $e_4 = (1,0,0,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.75. $e_1 = (2,-2,2,-2)^T$, $e_2 = (1,0,1,0)^T$, $e_3 = (0,-1,0,1)^T$, $e_4 = (0,0,1,-1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

60.76. $e_1 = (-3,1,1,1,1)^T$, $e_2 = (-2,0,1,1,1)^T$, $e_3 = (1,0,0,0,0)^T$, $e_4 = (1,0,0,-1,0)^T$, $e_5 = (1,0,0,0,-1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.77. $e_1 = (-4,0,0,3,1)^T$, $e_2 = (1,-1,0,0,0)^T$, $e_3 = (0,1,-1,0,0)^T$, $e_4 = (1,-1,1,-1,-1)^T$, $e_5 = (0,0,0,0,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

60.77.1. $e_1 = (2,2,2,0,0)^T$, $e_2 = (1,0,0,0,0)^T$, $e_3 = (1,0,-2,0,0)^T$, $e_4 = (-4,-3,-4,1,-1)^T$, $e_5 = (4,4,4,1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

60.77.2. $e_1 = (1,0,-1,0,0)^T$, $e_2 = (1,1,-1,0,0)^T$, $e_3 = (1,0,0,0,0)^T$, $e_4 = (-4,-2,10,2,-2)^T$, $e_5 = (-1,-8,5,0,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.77.3. $e_1 = (-3,4,-1,0,0)^T$, $e_2 = (0,0,0,1,-2)^T$, $e_3 = (1,-1,0,0,0)^T$, $e_4 = (-4,-2,0,3,3)^T$, $e_5 = (1,1,1,0,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

60.77.4. $e_1 = (1,-1,0,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,-1,0,0)^T$, $e_3 = (-1,1,-2,0,0)^T$, $e_4 = (1,-2,2,-1,1)^T$, $e_5 = (0,0,0,0,1)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

60.77.5. $e_1 = (8,4,2,1,9)^T$, $e_2 = (1,0,0,0,1)^T$, $e_3 = (2,1,0,0,2)^T$, $e_4 = (1,1,1,0,1)^T$, $e_5 = (0,0,0,1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.77.6. $e_1 = (-4,4,4,3,5)^T$, $e_2 = (2,0,0,0,2)^T$, $e_3 = (1,1,1,0,1)^T$, $e_4 = (0,0,0,1,0)^T$, $e_5 = (0,1,-1,0,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.77.7. $e_1 = (0,1,0,1,-1)^T$, $e_2 = (1,0,0,0,1)^T$, $e_3 = (0,1,0,0,0)^T$, $e_4 = (0,0,1,0,0)^T$, $e_5 = (0,0,0,1,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.77.8. $e_1 = (1,2,-1,1,1)^T$, $e_2 = (-1,-2,1,-1,3)^T$, $e_3 = (0,0,0,2,1)^T$, $e_4 = (0,0,1,-1,0)^T$, $e_5 = (1,-1,0,0,0)^T$; $A_J = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

60.78. $e_1 = (24, -12, 0, 0, 0, 0)^T$,
$e_2 = (6, 0, -2, 8, -4, 0)^T$,
$e_3 = (1, 0, 0, 3, 0, -1)^T$,
$e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$,
$e_5 = (3, 0, -1, -8, 4, 0)^T$,
$e_6 = (2, 0, 0, -3, 0, 1)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

60.79. $e_1 = (-2, 0, 2, 0, 2, 0)^T$,
$e_2 = (0, 0, 0, 0, 2, 0)^T$,
$e_3 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$,
$e_4 = (0, 0, 0, 3, 0, 1)^T$,
$e_5 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$,
$e_6 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$;

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

60.80. Указание. Проанализировать матрицу $A_J - \lambda_0 I$, где A_J – жорданова форма оператора A.

60.83. Если $\det A \neq 0$, то $2n - \sum_{j=1}^{k} s_j$; если $\det A = 0$, то $2n - \sum_{j=1}^{k} s_j - m_0$, где m_0 – алгебраическая кратность нулевого собственного значения.

60.84. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.85. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}$.

60.86. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

60.87. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.88. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

60.89. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

60.90.
$$\begin{bmatrix} \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & C_k^3\alpha^{k-3} & \dots & C_k^{n-1}\alpha^{k-n+1} \\ 0 & \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & \dots & C_k^{n-2}\alpha^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & \dots & C_k^{n-3}\alpha^{k-n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^k \end{bmatrix},$$

при $k \leq n-1$ здесь следует положить $C_k^0 = 1$ и $C_k^s = 0$ для $k < s$.

60.91. Указание. Положить $A = \lambda I + H$ и в равенстве $f(x) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(x-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(x-\lambda)^2 + \dots + \frac{f^{(s)}(\lambda)}{s!}(x-\lambda)^s$, где s – степень многочлена $f(x)$, взять $x = A$.

60.92. $J_n(\alpha^2)$, где n – порядок жордановой клетки.

60.93. Если $A = J_n(0)$, то жорданова форма матрицы A^2 состоит из

двух клеток: $J_{n/2}(0)$, $J_{n/2}(0)$ при четном n и $J_{(n-1)/2}(0)$, $J_{(n+1)/2}(0)$ при нечетном n.

60.94. Каждая клетка заменится на транспонированную, а сами клетки будут стоять на диагонали в обратном порядке.

60.95. Диагональные элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в жордановой форме оператора $\mathcal{A}$ заменятся на: а) $\lambda_1 - \lambda_0, \ldots, \lambda_n - \lambda_0$; б) $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n$.

60.96. Жорданова форма содержит две клетки: $J_{n/2}(\alpha)$, $J_{n/2}(\alpha)$ при четном n и $J_{(n-1)/2}(\alpha)$, $J_{(n+1)/2}(\alpha)$ при нечетном n.

60.97. Указание. Использовать задачу 60.91.

60.100. Указание. Учесть, что для жордановой формы A_J оператора $\mathcal{A}$ выполнено соотношение $A_J^2 = I$.

60.101. См. указание к предыдущей задаче.

60.102. Диагональная матрица с диагональными элементами, равными нулю или единице. Указание. Показать, что жорданова форма A_J удовлетворяет соотношению $A_J^2 = A_J$.

60.103. $J_9(0)$.

60.104. Жордановы формы операторов из пунктов "а)", "в)" совпадают и состоят из трех клеток $J_3(0)$. Жорданова форма оператора из пункта "б)" состоит из двух клеток $J_4(0)$ и $J_5(0)$.

60.104.1. $I \otimes A_J$.

60.105. Указание. Учесть, что в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$ свободный член отличен от нуля, и применить теорему Гамильтона–Кэли.

60.106. Указание. Воспользоваться задачей 60.91.

60.107. Жорданова форма – квазидиагональная матрица с диагональными клетками первого порядка, равными 0 и 1, и второго порядка, равными $J_2(0)$ (наличие диагональных клеток всех типов не обязательно).

60.108. Указание. Воспользоваться задачей 60.106.

60.110. Никакие две из матриц A, B и C не являются подобными.

60.111. A и C подобны между собой и не подобны B.

60.112. A и B подобны между собой и не подобны C.

60.114. Если λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$, отличное от ± 1, то $1/\lambda$ – также собственное значение, причем к обоим относится одинаковое число жордановых клеток с соответственно равными порядками.

60.114.1. а) $J_n(0)$; б) $\operatorname{diag}(J_{n-1}(0), 0)$.

60.114.2. Указание. Учесть, что в силу задачи 60.92 матрица $J_n^2(\sqrt{\alpha})$ подобна $J_n(\alpha)$.

60.114.4. Указание. Проанализировать жорданову форму матрицы X.

60.114.5. Указание. Учесть, что в силу задачи 60.93 матрица $J_{2n}^2(0)$ подобна A.

60.116. Указание. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – различные собственные значения матрицы A алгебраических кратностей $m_1, \ldots, m_k$. Тогда $\operatorname{tr}(A^p) = m_1\lambda_1^p + \ldots + m_k\lambda_k^p = 0$, $p = \overline{1,k}$. Рассмотреть систему этих соотношений относительно переменных $m_1, \ldots, m_k$.

60.119. Напишем квазидиагональную матрицу порядка mn, у которой на диагонали m раз повторена матрица J. Тогда жорданова форма соответственно матриц $A \otimes B$ и $A \otimes I_n + I_m \otimes B$ получается так: а) для каждого собственного значения λ_i матрицы A, не равного нулю, умножаем диагональные элементы i-й клетки J на λ_i; если же $\lambda_i = 0$, то соответствующую клетку J заменяем нулевой матрицей; б) ко всем диагональным элементам i-й клетки J прибавляем λ_i.

60.120. Если α – первообразный корень n-й степени из единицы и $r = \sqrt[n]{\varepsilon}$, то жорданова форма будет диагональной матрицей вида $\operatorname{diag}(1+r, 1+r\alpha, 1+r\alpha^2, \ldots, 1+r\alpha^{n-1})$.

§61

61.5. а) $\sum\limits_{j=1}^{k}(y,e_j)e_j$; б) $y-\sum\limits_{j=1}^{k}(y,e_j)e_j$; в) $2\sum\limits_{j=1}^{k}(y,e_j)e_j-y$; г) $y-2\sum\limits_{j=1}^{k}(y,e_j)e_j$.

61.6. а) $y-\sum\limits_{j=1}^{k}(y,e_j)e_j$; б) $y-2\sum\limits_{j=1}^{k}(y,e_j)e_j$.

61.7. а) $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 & 2 \\ 6 & 9 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$;

в) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

д) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; е) $\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 & -6 \\ 6 & 41 & -2 & 1 \\ 12 & -2 & 38 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 41 \end{bmatrix}$.

61.8. а) $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -7 & 12 & -4 & 4 \\ 12 & 3 & -6 & 6 \\ -4 & -6 & -13 & -2 \\ 4 & 6 & -2 & -13 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$;

в) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

д) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; е) $\frac{1}{21}\begin{bmatrix} -15 & 6 & 12 & -6 \\ 6 & 20 & -2 & 1 \\ 12 & -2 & 17 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 20 \end{bmatrix}$.

61.9. а) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$;

в) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

61.10. а) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

61.11. а) $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(y, g_k)}{(f_k, g_k)} f_k$; б) $2\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(y, g_k)}{(f_k, g_k)} f_k - y$.

61.13. Указание. Рассмотреть действие линейного функционала на произвольном ортонормированном базисе пространства V.

61.14. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

61.19. а) $\mathcal{I}$; б) если $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{I}$, то $\mathcal{A}^* = \overline{\alpha}\mathcal{I}$; в) $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$; г) так как $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{I}$, то $\mathcal{A}^* = \overline{\alpha}\mathcal{I}$.

61.20. Если $\Lambda = \operatorname{diag}\big((e_1, e_1), \ldots, (e_n, e_n)\big)$, то $(\mathcal{A}^*)_e = \Lambda^{-1} A_e^H \Lambda$. Равенство $(\mathcal{A}^*)_e = A_e^H$ выполнено, если $|e_1| = \ldots = |e_n|$.

61.21. $\mathcal{A}$ – скалярный оператор. Указание. Для произвольного ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ рассмотреть матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$: $f_i = e_i\ \forall i \neq k$, $f_k = 2e_k$.

61.24. Поворот на угол α в противоположном направлении.

61.25. $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

61.26. а) $f^*(\alpha) = \alpha h$; б) $f^*(\alpha) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{m} \mathcal{A}_k^* h_k$.

61.27. а) $\mathcal{A}^* x = B^T x$; б) $\mathcal{A}^* x = B^H x$.

61.28. а) $\mathcal{F}^* X = A^T X$ ($\mathcal{F}^* X = A^H X$); б) $\mathcal{G}^* X = X B^T$ ($\mathcal{G}^* X = X B^H$); в) $\mathcal{C}^* X = [A^T, X]$ ($\mathcal{C}^* X = [A^H, X]$).

61.28.1. $\mathcal{A}^* : Y \in \mathbb{R}^{n\times m} \mapsto Y^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Совпадают, если $m = n$.

61.28.2. $\mathcal{A}^* X = B X^T A$.

61.29. $\mathcal{A}^* p(t) = \int\limits_a^b K(s,t) p(s)\, ds$.

61.31. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ в обоих пунктах.

61.32. $\mathcal{A}^*$ – оператор проектирования на биссектрису второй и четвертой четверти параллельно оси Oy.

61.33. $\mathcal{A}^*$ – оператор проектирования на плоскость $x + y + z = 0$ параллельно оси Oz.

61.34. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$. **61.35.** $\begin{bmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{bmatrix}$.

61.36. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

61.37. а) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -9 \\ 4 & -2 & 11 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; ж) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & -11 \\ 12 & 51 & 49 \end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix} 2-i & 1 & 4-i \\ 2i & -1 & 1+2i \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix}$.

61.38. а) $\begin{bmatrix} -2 & 15 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -2+4i & 2+9i \\ 2-i & 2-4i \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 11 & 2-3i & 10i \\ -20i & -5-4i & 20 \\ 4+4i & 2 & -4+5i \end{bmatrix}$.

61.39. а) $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

61.40. а) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5/2 & 0 & 5/2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

61.41. а) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -16 & 0 & 16 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

61.42. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

61.46. Указание. Воспользоваться задачей 61.28.

61.47. $A^* = (\overline{\Gamma})^{-1} A^H \overline{\Gamma}$.

61.48. а) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

61.53. Указание. Учесть, что $\operatorname{im}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \subset \operatorname{im}\mathcal{A} + \operatorname{im}\mathcal{B}$, и с помощью равенства задачи 61.51, пункт "б)" показать, что $\operatorname{im}\mathcal{A} \subset \operatorname{im}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ и $\operatorname{im}\mathcal{B} \subset \operatorname{im}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$. Для доказательства второй части утверждения перейти к ортогональным дополнениям в равенстве $\operatorname{im}\mathcal{A}^* + \operatorname{im}\mathcal{B}^* = \operatorname{im}(\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)$.

61.54. а) $\ker\mathcal{D}^* = \mathcal{L}(3t^2-2)$, $\operatorname{im}\mathcal{D}^* = \mathcal{L}(t, 3t^2-2)$; б) $\ker\mathcal{D}^* = \mathcal{L}(3t^2-1)$, $\operatorname{im}\mathcal{D}^* = \mathcal{L}(t, 3t^2-1)$; в) $\ker\mathcal{D}^* = \mathcal{L}(t^2)$, $\operatorname{im}\mathcal{D}^* = \mathcal{L}(t, t^2)$.

61.55. Нулевое подпространство и подпространства $\mathcal{L}(t^k, t^{k+1}, \ldots, t^n)$, $k = \overline{0,n}$.

61.56. а) $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k) = 0$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$.

61.57. а) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; б) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$; в) $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$; г) $4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$; д) $3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0$.

61.62. в) Такого базиса нет. В остальных пунктах базис и матрица определены неоднозначно. Ими будут, например, векторы с указанными координатными столбцами (относительно исходного базиса) и соответственно матрицы:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$, $\begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3/2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(1,5,4)^T$, $\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 27/\sqrt{14} & -65/\sqrt{42} \\ 0 & 0 & 14/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

г) $(1,0,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T$, $\begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$, $\begin{bmatrix} 2 & 4/\sqrt{3} & 8/\sqrt{6} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

61.63. Кроме приведенного в ответе к пункту "д)" предыдущей задачи: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^T$, $\begin{bmatrix} 2 & 4/\sqrt{3} & 8/\sqrt{6} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$, $\begin{bmatrix} -2 & 4/\sqrt{3} & 7/\sqrt{6} \\ 0 & 2 & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, а также базисы, получаемые из любого из трех приведенных выше домножением некоторых векторов на множитель -1, и соответствующим образом измененные матрицы оператора.

61.64. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{t}{\sqrt{2}}$, $\frac{3t^2-2}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}t$, $\sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2-1)$; в) $1, t, t^2$.

61.65. Указание. Использовать существование общего собственного вектора у операторов $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{B}^*$ (см. задачу 59.47) и, следовательно, общего инвариантного подпространства размерности $n-1$ у операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (здесь n – размерность пространства).

61.67. Собственные значения оператора $\mathcal{A}^*$ комплексно сопряжены к собственным значениям оператора $\mathcal{A}$, причем сопряженные собственные значения λ и $\overline{\lambda}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ имеют одинаковые геометрическую и алгебраическую кратности.

61.71. Жорданова форма оператора $\mathcal{A}^*$ получается из жордановой формы оператора $\mathcal{A}$ заменой диагональных элементов сопряженными комплексными числами.

61.72. Канонический базис для $\mathcal{D}$ составляют, например, многочлены $2, 2t, t^2$. Канонический базис для $\mathcal{D}^*$ – многочлены $t^2, t/2, 1/2$.

§62

62.14. Указание. Воспользоваться формулой Бине–Коши.

62.15. Указание. Использовать задачу 61.45.

62.18. Указание. Для доказательства достаточности рассмотреть равенство $|\mathcal{A}(x+y)| = |\mathcal{A}^*(x+y)|$ (а в унитарном пространстве еще и равенство $|\mathcal{A}(x+iy)| = |\mathcal{A}^*(x+iy)|$) с произвольными $x, y \in V$.

62.19. В евклидовом пространстве аналогичное утверждение неверно – рассмотреть матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Указание. В унитарном пространстве показать, что корневые подпространства оператора $\mathcal{A}$ совпадают с его собственными подпространствами и попарно ортогональны.

62.26. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$.

62.27. $e_1 = \frac{1}{3}(2,1,-2)^T$, $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4-3i, 2+6i, 5)^T$,
$e_3 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4+3i, 2-6i, 5)^T$.

62.28. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$.

62.28.1. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}-i)^T, e_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ $(-2i, \sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i)^T$.

62.29. $A = U\Lambda U^H$, $\Lambda = \operatorname{diag}(2,-2,2i,-2i)$, $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & i & -i \\ 0 & -\sqrt{2} & i & -i \end{bmatrix}$.

62.30. Нет, неверно.

62.31. Указание. Использовать задачи 57.28 и 62.30.

62.32. Да, верно.

62.33. Да, может, если геометрическая кратность хотя бы одного собственного значения больше единицы.

62.34. Нет. **62.35.** Можно, только если $a = 0$.

62.37. Если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, то положить $(x, y) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + (\alpha_2 + \alpha_3)(\beta_2 + \beta_3) + \alpha_3\beta_3$.

62.38. Нормальными являются операторы пунктов "б)", "в)", "г)". Если $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$, $g(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$, то:

б) $(f,g) = (2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(2\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + (2\alpha_2 + 3\alpha_3)(2\beta_2 + 3\beta_3) + \alpha_3\beta_3$;

в) $(f,g) = (\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)(\beta_0 + \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3) + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)(\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3) + (\alpha_2 + 3\alpha_3)(\beta_2 + 3\beta_3) + \alpha_3\beta_3$;

г) $(f,g) = (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)(\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3) + (\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3)(\beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3) + (\alpha_2 - 3\alpha_3)(\beta_2 - 3\beta_3) + \alpha_3\beta_3$.

62.39. Указание. Построить многочлен $f(t)$ так, чтобы для каждого собственного значения λ_j оператора $\mathcal{A}$ выполнялось условие $f(\lambda_j) = \overline{\lambda_j}$.

62.40. Указание. Перейти к оператору $\mathcal{B}$, действующему в унитарном пространстве W: $\dim W = \dim V$, у которого матрица B_f в некотором ортонормированном базисе f пространства W совпадает с матрицей A_e оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе e пространства V, и проанализировать его собственные значения.

62.41. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

62.42. Указание. Использовать предыдущую задачу.

62.43. Указание. Использовать задачу 62.41.

62.44. Нет; рассмотреть матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

62.45. Указание. Использовать предыдущую задачу.

62.46. Указание. Использовать задачу 62.39.

62.47. Указание. Рассмотреть равенство $A_eB_e = B_eA_e$ в ортонормированном базисе e из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

62.49. Указание. Использовать задачу 61.65.

62.50. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^T$,

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^T$.

62.51. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

62.52. Указание. Учесть задачу 62.46.

62.53. Указание. Показать, что $\mathcal{A}^*\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}\mathcal{A}^*$ – нулевые операторы.

62.54. Указание. Пусть $\mathcal{A}$ имеет простые и различные по модулю собственные значения, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис из соответствующих собственных векторов. Пользуясь нормальностью матриц $A_e B_e$ и B_e, показать, что B_e – диагональная матрица.

62.55. Указание. Рассуждая так же, как и в доказательстве предыдущей задачи, показать, что матрица B_e квазидиагональная, причем ее диагональные клетки порядка, большего 1, соответствуют кратным собственным значениям оператора $\mathcal{A}$.

62.57. Указание. Использовать теорему Шура и тот факт, что нормальная матрица унитарно подобна диагональной.

62.58. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

62.59. Указание. Воспользоваться критерием, установленным в задаче 62.57.

62.60. Эти векторы суть собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие собственным значениям с максимальным модулем. Указание. Разложить вектор x по ортонормированному базису из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

62.61. Указание. Применить результат предыдущей задачи: а) к вектору с координатным столбцом $(1, \ldots, 1)^T$; б) к векторам с единичными координатными столбцами.

62.62. Нет. Например, для унитарного оператора $\mathcal{A}$ отношение $|\mathcal{A}x|/|x|$ равно единице для любого ненулевого вектора x.

§63

63.2. а) Да; б) нет. **63.3.** Да.

63.5. Операторы умножения на число α: $|\alpha| = 1$.

63.6. а), в), г), д) Да; е) да, только если $n = 0$; ж) да, только если $A^T A = I$ ($A^H A = I$); з) да, только если $BB^T = I$ ($BB^H = I$); б) нет.

63.7. Указание. Рассмотреть матрицу оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе из собственных векторов и использовать тот факт, что через точки λ_1, λ_2, λ_3 комплексной плоскости можно провести окружность.

63.8. Только если это единичный оператор.

63.10. а) Собственное подпространство для $\lambda = 1$ – это подпространство всех четных многочленов, а собственное подпространство для $\lambda = -1$ – соответственно всех нечетных многочленов; б) собственное подпространство для $\lambda = 1$ натянуто на многочлены $t^n + 1$, $t^{n-1} + t^2, \ldots$, собственное подпространство для $\lambda = -1$ – соответственно на многочлены $t^n - 1$, $t^{n-1} - t^2, \ldots$.

63.11. Указание. Проанализировать спектр оператора $\mathcal{A}$.

63.13. а), б), д), е), з) Нет; в), г), ж) да.

63.14. а), б), е) Нет; в), г), д) да.

63.15. а), в), г) Да; б) нет.

63.16. а) $A^T \Gamma A = \Gamma$; б) $A^H \overline{\Gamma} A = \overline{\Gamma}$. Если базис ортонормированный, то: а) $A^T A = I$; б) $A^H A = I$.

63.18. а), г), ж) Нет; б), в), д), е) да.

63.19. а) Нет; б), в), г) да.

63.20. Указание. Воспользоваться задачей 63.17.

63.22. Указание. Учесть, что если z – корень многочлена $p(\lambda)$, то $\overline{z} = 1/z$ – тоже его корень.

63.24. Указание. Воспользоваться формулой Бине–Коши.

63.25. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

63.30. Да. **63.31.** а), в), д) Да; б), г) нет.

63.32. Указание. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис. Показать, что векторы $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ имеют одинаковую длину.

63.33. Указание. Для $\forall x, y, z \in V$, $\forall \alpha, \beta \in P$ установить тождество $(\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) - \alpha \mathcal{A}x - \beta \mathcal{A}y, \mathcal{A}z) = 0$.

63.34. Да во всех пунктах.

63.35. а), в) Нет собственных векторов;

б) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $f_1 = c(-1, 1+\sqrt{2})^T$, $f_2 = c(1+\sqrt{2}, 1)^T$, где $c = (4+2\sqrt{2})^{-1/2}$;

г) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$;

д) при $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, нет собственных векторов; при $\alpha = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; при $\alpha = \pi$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, любой ортонормированный базис – базис из собственных векторов;

е) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $f_1 = \left(\sin\frac{\alpha}{2}, -\cos\frac{\alpha}{2}\right)^T$, $f_2 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)^T$;

ж) $\lambda_1 = 1$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$;

з) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)^T$;

и), к) $\lambda_1 = 1$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$;

л) $\lambda_1 = -1$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{2}-1, 1, -\sqrt{2}-1)^T$;

м) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $f_1 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T$, $f_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$;

н) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $f_1 = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)^T$, $f_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^T$, $f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)^T$.

63.36. а) $\lambda_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$;

б) $\lambda_1 = \frac{4+3i}{5}$, $\lambda_2 = \frac{4-3i}{5}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$;

в) $\lambda_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\lambda_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$;

г) $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $f_1 = c(i(1+\sqrt{2}), 1)^T$, $f_2 = c(1, i(1+\sqrt{2}))^T$, где $c = (4+2\sqrt{2})^{-1/2}$;

д) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i-1, 1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1+i)^T$;

е) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$, $f_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, -2)^T$, $f_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}, -2)^T$;

ж) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{1+i2\sqrt{2}}{3}$, $\lambda_3 = \dfrac{1-i2\sqrt{2}}{3}$, $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $f_2 = \dfrac{1}{2}(1,-1,i\sqrt{2})^T$, $f_3 = \dfrac{1}{2}(1,-1,-i\sqrt{2})^T$;

з) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $f_2 = \dfrac{1}{2}(1,-1,i\sqrt{2})^T$, $f_3 = \dfrac{1}{2}(1,-1,-i\sqrt{2})^T$;

и) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \dfrac{3+i\sqrt{7}}{4}$, $\lambda_3 = \dfrac{3-i\sqrt{7}}{4}$, $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{2}-1,1,-\sqrt{2}-1)^T$, $f_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{7(2+\sqrt{2})}}(1+\sqrt{2}-i(\sqrt{7}+\sqrt{14}),3+2\sqrt{2}+i\sqrt{7},2\sqrt{2})^T$, $f_3 = \overline{f_2}$;

к) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\lambda_3 = -\lambda_2$, $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)^T$, $f_2 = \dfrac{1}{2}(1,-i,-\sqrt{2})^T$, $f_3 = \dfrac{1}{2}(1,-i,\sqrt{2})^T$;

л) $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -\lambda_4 = i$, $f_1 = \dfrac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, $f_2 = \dfrac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$, $f_3 = \dfrac{1}{2}(1,-i,-1,i)^T$, $f_4 = \dfrac{1}{2}(1,i,-1,-i)^T$.

63.38. Оператор $\mathcal{A}$ осуществляет ортогональное отражение в пунктах "а)"–"г)". Подпространство L натянуто на векторы: а) $(1+\sqrt{2},1)^T$; б) $(2,1)^T$; в) $(\cos(\alpha/2),\sin(\alpha/2))^T$; г) $(1,1,0)^T$, $(1,-1,2)^T$.

63.39. Если $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$, то $(f,g) = (2a_0 - a_1 - a_2)(2b_0 - b_1 - b_2) + (a_0 - a_1)(b_0 - b_1) + (a_0 - a_1 - a_2)(b_0 - b_1 - b_2)$.

63.41. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

63.42. а), в) Любой ортонормированный базис. В остальных пунктах канонические базисы и соответствующие матрицы определены неоднозначно; ими будут, например, векторы со следующими координатными столбцами и матрицы:

б) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)^T$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$, $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$, $f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$; $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $f_3 = (0,0,-1)^T$; $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$;

е) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $f_3 = (0,0,-1)^T$; $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$;

ж) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{2}-1,1,-1-\sqrt{2})^T$, $\dfrac{1}{\sqrt{14(2+\sqrt{2})}}(1+\sqrt{2},3+2\sqrt{2},2\sqrt{2})^T$.

$\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1+\sqrt{2},-1,0)^T$; $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{7} \\ 0 & \sqrt{7} & 3 \end{bmatrix}$;

з) $\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$, $\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)^T$;

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

и) $\frac{1}{2}(1,1,1,-1)^T$, $\frac{1}{2}(1,1,-1,1)^T$, $\frac{1}{2}(1,-1,1,1)^T$, $\frac{1}{2}(-1,1,1,1)^T$;
$\operatorname{diag}(1,1,1,-1)$;

к) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)^T$;

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

63.43. Указание. Показать, что такая матрица подобна матрице $\operatorname{diag}(\cos\alpha+i\sin\alpha, \cos\alpha-i\sin\alpha)$, которая, в свою очередь, подобна матрице $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

63.44. Указание. Проанализировать спектр оператора $\mathcal{A}$.

63.45. Указание. 1. Предположить противное: существуют такие векторы e_1 и e_2 ($|e_1|=1$), что $\mathcal{A}e_1=\lambda e_1$ и $\mathcal{A}e_2=\lambda e_2+e_1$. Рассмотреть образ вектора $x=e_2-(e_1,e_2)e_1$ и прийти к противоречию. 2. Предположить противное: существует неортогональная пара векторов x и y таких, что $\mathcal{A}x=\lambda x$, $\mathcal{A}y=\mu y$, где $\lambda\neq\mu$. Пусть число $\alpha\in\mathbb{C}$ выбрано так, что $\operatorname{Re}[(\lambda\overline{\mu}-1)(\alpha x,y)]>0$. Показать тогда, что $|\mathcal{A}(\alpha x+y)|^2-|\alpha x+y|^2>0$.

63.49. Длина вектора w должна быть равна единице.

63.50. Указание. Показать, что $H^2=I$.

63.51. а) Простому собственному значению $\lambda=-1$ отвечают собственные векторы, коллинеарные вектору w; собственными векторами, отвечающими собственному значению $\lambda=1$, являются все ненулевые векторы, ортогональные w; б) определитель равен -1.

63.53. $w=(-\sin\frac{\alpha}{2},\cos\frac{\alpha}{2})^T$.

63.54. Выбрать $w=\frac{1}{|x-ke_1|}(x-ke_1)$, где k – любое вещественное число, удовлетворяющее условию $k^2-2k\operatorname{Im}(e_1,x)-|x|^2=0$.

63.55. По данной матрице A порядка n выберем, в соответствии с предыдущей задачей, матрицу H_1 так, чтобы матрица $A_1=H_1A$ имела вид $A_1=\begin{bmatrix} k & a_1' \\ O & \widetilde{A}_1 \end{bmatrix}$, где $\widetilde{A}_1$ – подматрица порядка $n-1$. Строим теперь матрицу H_2 вида $H_2=\operatorname{diag}(1,\widetilde{H}_2)$, где $\widetilde{H}_2$ – матрица отражения порядка $n-1$, выбранная так, что в матрице $\widetilde{H}_2\widetilde{A}_1$ все поддиагональные элементы первого столбца равны нулю. Тогда у матрицы H_2H_1A первые два столбца совпадают со столбцами треугольной матрицы. Продолжая таким образом, после $n-1$ шагов получим верхнюю треугольную матрицу.

§64

64.2. Нет.

64.8. В унитарном пространстве это операторы умножения на действительное число. В одномерном евклидовом пространстве все линейные операторы являются симметричными.

64.9. Указание. Векторы x и y выбрать в качестве базиса пространства.

64.11. Да. Указание. Показать, что $(f_i, g_j) = (g_i, f_j)\ \forall i \neq j$.

64.14. Оператор $\mathcal{A}$ либо равен $\pm\mathcal{I}$, либо задает ортогональное отражение.

64.15. б,г) Да; а,в) нет.

64.16. в,е) Да; остальные – нет. **64.17.** Да.

64.18. а) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$; $A_e = \operatorname{diag}(0,4)$;

б) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i,1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(i,-2)^T$; $A_e = \operatorname{diag}(0,5)$;

в) $e_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)^T$, $e_2 = \frac{1}{3}(2,-1,-2)^T$, $e_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)^T$; $A_e = \operatorname{diag}(9,18,-9)$;

г) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,-4)^T$, $e_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)^T$; $A_e = \operatorname{diag}(9,9,27)$.

64.19. $U^H A U = D$, где:

а) $D = \operatorname{diag}(5,-1)$, $U = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$;

б) $D = \operatorname{diag}(2,8)$, $U = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{bmatrix}$;

в) $D = \operatorname{diag}(2,4,4)$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

64.22. а) $A^T\Gamma = \Gamma A$; б) $A^H\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}A$.

64.23. а,е,ж) Не является; в остальных пунктах – является.

64.24. $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17 & 5 & -1 \\ 5 & -7 & 5 \\ -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$. Указание. Найти многочлен $f_3(t)$, ортогональный многочленам $f_1(t) = 2 + 2t - t^2$ и $f_2(t) = 2 - t + 2t^2$ и имеющий ту же длину. После этого построить матрицу оператора в ортогональном базисе $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$.

64.25. $\mathcal{A}$ – оператор умножения на действительное число.

64.40. Нет. Указание. В унитарном пространстве для любых двух векторов x, y преобразовать равенства $(\mathcal{A}(x+y), x+y) = 0$ и $(\mathcal{A}(x+iy), x+iy) = 0$. В евклидовом пространстве – см. предыдущую задачу.

64.46. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

64.48. $(\lambda^2+1)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

64.49. Указание. Использовать результат задачи 57.70.

64.50. Указание. Использовать результат задачи 57.71.

64.52. Указание. Рассмотреть выражение (Hx, x) на единичных векторах x.

64.53. Указание. Согласно задаче 64.51 k-й единичный столбец является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ_1.

64.56. Указание. Без ограничения общности будем считать, что подматрица H_{n-1} расположена в левом верхнем углу матрицы H. Пусть $e_1, \ldots, e_{n-1}$ – ортонормированный базис из собственных векторов матрицы H_{n-1}, отвечающих собственным значениям $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ соответственно, причем $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$. Согласно задаче 64.52:

$$\max_{y \in \widetilde{M}_{n-k}, y \neq \theta} \frac{(H_{n-1}y, y)}{(y, y)} = \mu_k = \min_{y \in \widetilde{L}_k, y \neq \theta} \frac{(H_{n-1}y, y)}{(y, y)},$$

где $\widetilde{L}_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$, $\widetilde{M}_{n-k} = \mathcal{L}(e_k, \ldots, e_{n-1})$. Если каждому $(n-1)$-мерному вектор-столбцу y поставить в соответствие вектор-столбец $x = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$, то $\dfrac{(H_{n-1}y, y)}{(y, y)} = \dfrac{(Hx, x)}{(x, x)}$. Подпространствам $\widetilde{L}_k$ и $\widetilde{M}_{n-k}$ будут соответствовать в n-мерном пространстве подпространства L_k и M_{n-k} той же размерности, и в силу теоремы Куранта–Фишера имеем:

$$\lambda_{k+1} \leq \mu_k \leq \lambda_k.$$

§65

65.1. Нет.

65.11. Указание. а) Разложить вектор x по ортонормированному базису из собственных векторов оператора $\mathcal{H}$.

65.12. $\mathcal{H} = \mathcal{O}$.

65.12.1. Да, справедливо. Указание. Учесть, что если $x_1, \ldots, x_n$ – столбцы матрицы X, то $\operatorname{tr}(X^T A X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^T A x_k$.

65.13.1. Указание. В определении положительно определенной матрицы A использовать вещественные вектор-столбцы x.

65.14. Указание. Рассмотреть величину $x^T A x$ для вектор-столбцов x, у которых отличны от нуля лишь компоненты с номерами, совпадающими с номерами строк (столбцов), в которых расположена главная подматрица.

65.16. Указание. Воспользоваться задачей 64.56.

65.17. Указание. Проанализировать собственные значения матрицы главного минора.

65.21. Указание. Правую часть равенства $A = S^H D S$ ($S^H S = I$, D – диагональная) записать в виде $A = (D^{1/2}S)^H D^{1/2} S$.

65.22. Матрица не является знакоопределенной.

65.23. Матрица положительно определена.

65.24. Матрица положительно определена.

65.25. Матрица является неотрицательно определенной.

65.26. Матрица является неотрицательно определенной.

65.27. Указание. Вычислить собственные значения матрицы.

65.28. Указание. Показать, что для определителя этой матрицы n-го порядка выполнено: $D_n \geq \frac{a}{2} D_{n-1} \quad \forall n \geq 2$.

65.29. Указание. Показать, что для определителя этой матрицы k-го порядка выполнено: $D_k \geq \frac{a_k}{2} D_{k-1} \quad \forall k \geq 2$.

65.30. Указание. Пусть $a_{kk} = 0$ и $a_{kj} \neq 0$. Для вектор-столбца x, у которого k-я и j-я компоненты равны x_k и x_j соответственно, а все остальные

– равны нулю, выписать выражение x^TAx и взять в нем $x_k = \lambda a_{kj}x_j$, где $x_j \neq 0$ фиксировано, а $\lambda \in \mathbb{R}$ произвольно.

65.31. Указание. Использовать задачу 65.15.

65.32. Указание. Использовать критерий задачи 65.7.

65.34. Указание. Воспользоваться формулами Виета.

65.35. Указание. Использовать задачи 64.29 и 59.57.

65.36. Указание. Воспользоваться результатами задач 52.22, пункт "а)" и 57.80.

65.36.1. Указание. Воспользоваться результатами задач 52.22, пункт "б)" и 59.57, пункт "б)".

65.37. Оператор $\mathcal{A}$ – единичный.

65.38. Указание. Рассмотреть ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица оператора диагональна: $A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, причем все $\lambda_k > 0$, и переписать требуемое неравенство, используя координаты векторов x и y в этом базисе.

65.41. Указание. См. указание к задаче 65.21.

65.42. Указание. Показать, что если $A = B^HB$, то $A^{-1/2}B^HBA^{-1/2} = I$. Вывести отсюда, что $B = UA^{1/2}$ для некоторой унитарной матрицы U.

65.43. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. **65.44.** $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

65.45. $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{bmatrix}$. **65.46.** $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

65.46.1. Указание. Из задачи 65.12.1 следует, что $A = xx^H$ для некоторого ненулевого $x \in \mathbf{C}^{n\times 1}$. Тогда $A^2 = (x^Hx)A$. Далее учесть, что $x^Hx = \operatorname{tr} A$.

65.47. Указание. Способ 1. Воспользоваться результатами задач 65.39 и 65.40. Способ 2. Пусть $D = \operatorname{diag}(a_{11}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1})$. Тогда требуемое неравенство равносильно неравенству $\det(D^{1/2}HD^{1/2}) \leq 1$, и поэтому достаточно рассмотреть матрицу H, все диагональные элементы которой равны 1. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – ее собственные значения, то $\det H = \prod_{k=1}^n \lambda_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^n = \left(\frac{1}{n}\operatorname{tr} H\right)^n = 1$.

65.49. Указание. Воспользоваться результатом задачи 62.49.

65.50. Указание. Использовать определение неотрицательной определенности оператора.

65.51. Указание. Рассмотреть собственные значения оператора $\mathcal{H}$.

65.52. Указание. Перейти к неравенству $\mathcal{I} \leq \mathcal{H}_2^{-1/2}\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2^{-1/2}$ и воспользоваться предыдущей задачей.

65.53. Указание. Записать требуемое неравенство в ортонормированном базисе из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

65.55. Указание. Использовать положительную определенность оператора $\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{H}\mathcal{A}^{-1/2}$.

65.57. Указание. Воспользоваться результатом задачи 62.49.

65.58. Указание. Использовать задачу 65.57.

65.59. Указание. Показать, что оператор $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ имеет те же собственные значения, что и эрмитов оператор $\mathcal{H}_2^{1/2}\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2^{1/2}$.

65.62. $B^{-1}\mathcal{A}$.

65.68. Указание. В силу задачи 65.67 существует невырожденная матрица S: $S^HAS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \equiv \Lambda$, $S^HBS = I$. Поэтому $S^H(\alpha A + (1-\alpha)B)S = \alpha\Lambda + (1-\alpha)I$, откуда $|\alpha A + (1-\alpha)B| = |B| \prod_{k=1}^n (\alpha\lambda_k + 1 - \alpha) \geq |B| \cdot |\Lambda|^\alpha$.

65.69. Указание. В силу задачи 65.67 существует невырожденная матрица S: $S^HAS = I$, $S^HBS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_k \geq 0$ $\forall k$. Поэтому $|A+B| = d^2 \prod_{k=1}^n (1+\lambda_k)$, $|A| = d^2$, $|B| = d^2 \prod_{k=1}^n \lambda_k$, где $d = |\det S|^{-1}$.

65.70. Указание. Матрицы A_{11} и A_{22} положительно определены и, если $T = \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}$, то $T^HAT = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$, откуда $A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12} > O$. Кроме того, $\det A = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}) \leq \det A_{11} \cdot \det A_{22}$ в силу неравенства задачи 65.69.

65.71. Указание. Как следует из указания к задаче 65.70, матрицы A_{22}, $A_{22} - A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}$, $A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12}$ положительно определены. Следовательно, в силу неравенства задачи 65.69 $\det A_{22} \geq \det(A_{12}^HA_{11}^{-1}A_{12})$.

65.72. Указание. См. указание к задаче 65.69.

65.73. Указание. Умножая обе части неравенства слева и справа на $(\det A^{-1/2})^{1/n}$, показать, что без ограничения общности можно считать, что $A = I$. После этого переписать неравенство, используя собственные значения матрицы B.

65.74. Указание. Воспользоваться задачей 64.57.

65.75. Указание. Учесть, что в силу неравенства Коши–Буняковского и свойств собственных значений самосопряженного оператора: $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{A}^{1/2}x, \mathcal{A}^{1/2}y) \leq \sqrt{(\mathcal{A}^{1/2}x, \mathcal{A}^{1/2}x)(\mathcal{A}^{1/2}y, \mathcal{A}^{1/2}y)} = \sqrt{(\mathcal{A}x, x)(\mathcal{A}y, y)} \leq \lambda_{\max}(\mathcal{A})$.

65.76. Указание. Учесть, что так как $(\mathcal{B}x, x) = 1 \iff |\mathcal{B}^{1/2}x| = 1$, то для $u = \mathcal{B}^{1/2}x$ в силу предыдущей задачи имеем:

$$(x, y) = (\mathcal{B}^{-1/2}u, y) \leq \lambda_{\max}(\mathcal{B}^{-1/2}) = 1/\sqrt{\lambda_{\min}(\mathcal{B})}.$$

65.77. Указание. Свести данную задачу к задаче 65.75 и воспользоваться результатом из 65.49.

§66

66.1. В алгебраическую форму записи комплексного числа.

66.2. $\mathcal{A} = \mathcal{O}$. **66.3.** а) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$; б) $\mathcal{A} = \mathcal{B}^*$.

66.7. а) Она косоэрмитова; б) она эрмитова.

66.8. Указание. Использовать равенство $x^HAx = \operatorname{tr}(Axx^H)$ и результат задачи 66.4.

66.9. Если $\mathcal{A} = \mathcal{H} + \mathcal{K}$ – эрмитово разложение оператора $\mathcal{A}$, то эрмитово разложение оператора $\mathcal{A}^*$ имеет вид $\mathcal{A}^* = \mathcal{H} - \mathcal{K}$.

66.10. Указание. Использовать результат задачи 62.49 и теорему 66.2.

66.11. Указание. См. указание к задаче 66.10.

66.12. Указание. См. указание к задаче 66.10.

66.14. Указание. Проанализировать равенство $(\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{H}_1x, x) + i(\mathcal{H}_2x, x)$ для нормированных собственных векторов x оператора $\mathcal{A}$.

66.16. Указание. Воспользоваться теоремой Бендиксона из задачи 66.14.

66.17. Когда оператор $\mathcal{A}$ эрмитов. Указание. См. задачу 65.72.

66.19. $\mathcal{A}$ – кососимметрический оператор.

66.22. Если $\rho_1, \ldots, \rho_r$ – сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$, то: а) у $\mathcal{A}^*$ те же сингулярные числа; б) $\alpha\mathcal{A}$ имеет сингулярные числа $|\alpha|\rho_1, \ldots, |\alpha|\rho_r$.

66.26. Сингулярные числа оператора $\mathcal{A}^{-1}$ обратны сингулярным числам оператора $\mathcal{A}$.

66.29. $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$.

66.30. $2\sqrt{3}, \sqrt{3/2}, 0$.

66.35. а) $A^T = V^T \Lambda U^T$; б) $A^H = V^H \Lambda U^H$; в) $A^{-1} = (PV)^H P \Lambda^{-1} P (UP)^H$, где матрица P получена из единичной матрицы перестановкой ее строк в обратном порядке.

66.36. Указание. Достаточно рассмотреть случай $m \geq n$. Пусть $A = U\Lambda V$ - сингулярное разложение матрицы A. Представить матрицы Λ и U в блочном виде: $\Lambda = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix}$, где $S = \operatorname{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $O \in \mathbb{C}^{(m-n)\times n}$; $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}$, где $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $U_2 \in \mathbb{C}^{m\times(m-n)}$ и положить $\widetilde{U} = U_1/\sqrt{2}$, $\widetilde{V} = V/\sqrt{2}$. Тогда матрица $W = \begin{bmatrix} \widetilde{U} & -\widetilde{U} & U_2 \\ \widetilde{V}^H & \widetilde{V}^H & O \end{bmatrix}$ будет унитарной, и выполнено равенство

$$B = W \begin{bmatrix} S & O & O \\ O & -S & O \\ O & O & O \end{bmatrix} W^H.$$

66.37. Неверно. Указание. Рассмотреть матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

66.39. $(\operatorname{tr} AA^T)^{1/2}$ и $\min(m,n) - 1$ нулей. Указание. Использовать задачу 57.58.

66.39.1. $A_1 \otimes A_2 = (U_1 \otimes U_2)(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(V_1 \otimes V_2)$.

66.42. Указание. Воспользоваться задачей 66.40.

66.43. Указание. Воспользоваться задачей 66.40.

66.44. Указание. Пусть $A = U\Lambda V$ – сингулярное разложение матрицы A. Тогда

$$\operatorname{tr}(AW) = \operatorname{tr}(U\Lambda VW) = \operatorname{tr}(\Lambda VWU) \equiv \operatorname{tr}(\Lambda Z),$$

где $Z = VWU$ вместе с W пробегает все множество унитарных матриц. Очевидно, что $|\operatorname{tr}(\Lambda Z)| \leq \rho_1 + \ldots + \rho_n$. Равенство здесь достигается, например, при $Z = I$.

66.45. В тригонометрическую форму записи комплексного числа.

66.46. Указание. Показать, что $\mathcal{H} = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^{1/2}$.

66.47. Указание. Учесть, что если $\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{U}$ – полярное разложение, то $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{H}^2$, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{H}^2\mathcal{U}$.

66.49. Указание. См. указание к задаче 66.47.

66.50. Для $\mathcal{A} < \mathcal{O}$: $\mathcal{H} = -\mathcal{A}$, $\mathcal{U} = -\mathcal{I}$.

66.51. В естественном базисе e пространства M_n:

$$H_e = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n, 0),\ U_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

66.52. $B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$, например.

66.53. $B = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$.

66.54. $B = \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$.

66.54.1. $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, например.

66.55. $B = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$.

66.56. $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

66.57. $B = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$.

66.58. $B = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

66.59. $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, например.

66.60. $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, например.

66.60.1. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, например.

66.60.2. Кроме имеющегося в ответе к 66.54.1, например, разложение с матрицами $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & -1 & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$.

66.61. Если $z_k = r_k\omega_k$, где $\omega_k = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k$, – тригонометрическая форма записи диагональных элементов, то $A = HU$, $H = \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_n)$, $U = \operatorname{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

66.61.1. $B = (y^Hy)^{1/2}(x^Hx)^{-1/2}xx^H$, U – любая унитарная матрицы, для которой $U^H\dfrac{x}{\sqrt{x^Hx}} = \dfrac{y}{\sqrt{y^Hy}}$. Указание. Используя задачу 65.46.1, построить матрицу B в полярном разложении $A = BU$.

66.65. Указание. Пусть $A = S\Lambda S^{-1}$, где Λ – диагональная матрица, и $S = PU$ – полярное разложение матрицы S. Тогда выполнено равенство

$$A = (PU\Lambda U^HP)(P^{-1})^2.$$

§67

67.1. 1) $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$;
5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$; 7) I;
8) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_{ij} = i - j$;
9) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, все элементы равны нулю, кроме элементов побочной диагонали, равных единице;
10) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_{ij} = 1$ при $|i - j| \leq 1$, остальные элементы нулевые;
11) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_{ij} = 1$ при $i - j \leq 2$, остальные элементы нулевые.

67.2. 1) x_1^2; 2) x_1^2; 4) $2x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_1x_2$;
6) $x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 14x_2x_3$; 7) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$;
9) при $n = 2k+1$: $x_{k+1}^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{k} x_i x_{n+1-i}$, при $n = 2k$: $2\sum\limits_{i=1}^{k} x_i x_{n+1-i}$;
10) $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$; 11) при $n \leq 3$: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i x_j$.

67.3. 1) $-3x_1y_1$; 2) $9x_2y_2 - 9x_1y_2 - 9x_2y_2$;
3) $x_1y_1 + 5x_2y_2 + 7x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$;
4) $2x_1y_1 - 3x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1$; 5) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{|i-j|=1} x_i y_j$.

67.4. 1) $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 10x_1x_2$; 2) $4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$;
3) $8x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$; 4) $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_2x_4)$;
5) $2\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

67.5. 1) Поменяются местами i-я и j-я строки, а также i-й и j-й столбцы; 2) внедиагональные элементы i-й строки и i-го столбца умножатся на α, а i-й диагональный элемент умножится на α^2; 3) к i-й строке прибавится j-я, умноженная на α, а затем к новому i-му столбцу прибавится новый j-й столбец, умноженный на α; 4) матрица отразится симметрично побочной диагонали.

67.5.1. Указание. Использовать общий вид билинейной формы A в каком-либо базисе пространства V.

67.6. Ортогональной матрицей.

67.9. 1) $4y_1^2 + 4y_2^2$; 2) $y_1^2 - \dfrac{5}{4}y_2^2$; 3) $25y_1^2$; 4) $-y_1^2 - y_2^2$; 5) $-16y_1^2$;
6) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; 7) $y_1^2 - 4y_2^2 - y_3^2$; 8) $y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$; 9) $4y_1^2 + \dfrac{7}{16}y_2^2 - \dfrac{25}{7}y_3^2$;
10) $-12y_1^2 - \dfrac{5}{3}y_2^2 + \dfrac{12}{5}y_3^2$; 11) $y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 + \dfrac{1}{2}y_4^2$; 12) $-y_1^2 - \dfrac{3}{4}y_2^2 - \dfrac{2}{3}y_3^2$.

67.11. 1) $2y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$; $x_1 = y_1 - 5y_2 + y_3$, $x_2 = -y_2 + y_3$, $x_3 = y_2 + y_3$;
2) $2y_1^2 + 10y_2^2 + 40y_3^2$; $x_1 = y_1 + y_2 - 6y_3$, $x_2 = 2y_2 + 8y_3$, $x_3 = 10y_3$;
3) y_1^2; $y_1 = 3x_1 - 2x_2 - x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$;

4) $8y_1^2+\frac{1}{2}y_3^2$; $y_1=x_1+x_2+\frac{1}{4}x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$;

5) $3y_1^2-30y_2^2+530y_3^2$; $y_1=x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{2}x_3$, $y_2=\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{20}x_3$, $y_3=\frac{1}{20}x_3$;

6) $y_1^2+3y_2^2-3y_3^2+y_4^2$; $y_1=x_1-x_2$, $y_2=x_2+\frac{1}{3}x_3$, $y_3=\frac{1}{3}x_3+x_4$, $y_4=3x_4$;

7) $y_1^2-y_2^2$; $x_1=y_1-y_2-y_3$, $x_2=y_1+y_2-y_4$, $x_3=y_3$, $x_4=y_4$;

8) $3y_1^2+15y_2^2-85y_3^2-187y_4^2$; $x_1=y_1-y_2+2y_3-y_4$, $x_2=3y_2-6y_3+3y_4$, $x_3=5y_3+6y_4$, $x_4=17y_4$;

9) $\frac{1}{4}(y_1^2-y_2^2-3y_3^2+3y_4^2)$; $y_1=x_1+x_2+2x_3$, $y_2=x_1-x_2+2x_3$, $y_3=x_3+x_4$, $y_4=x_3-x_4$;

10) $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2+y_5^2+y_6^2$; $y_1=x_1-x_3$, $y_2=x_2-x_4$, $y_3=x_3$, $y_4=x_4$, $y_5=x_3-x_5$, $y_6=x_4-x_6$;

11) y_1^2; $y_1=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$, $y_2=x_2,\ldots,y_{k-1}=x_{k-1}$, $y_k=x_1$, $y_{k+1}=x_{k+1},\ldots,y_n=x_n$, если $a_k\neq 0$;

12) $y_1^2+\frac{3}{4}y_2^2+\frac{4}{6}y_3^2+\frac{5}{8}y_4^2+\ldots+\frac{n+1}{2n}y_n^2$;
$y_1=x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3+\ldots+x_n)$, $y_2=x_2+\frac{1}{3}(x_3+x_4+\ldots+x_n),\ldots$
$y_n=x_n$;

13) $y_1^2-y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2-\frac{4}{6}y_5^2-\ldots-\frac{n-1}{2(n-2)}y_n^2$;
$y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+x_3+x_4+\ldots+x_n$, $y_2=\frac{1}{2}(x_1-x_2)$,
$y_3=x_3+\frac{1}{2}(x_4+x_5+\ldots+x_n)$, $y_4=x_4+\frac{1}{3}(x_5+x_6+\ldots+x_n),\ldots$
$y_n=x_n$;

14) если n четно: $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\ldots+y_{n-1}^2-y_n^2$,
$y_k=(x_k+x_{k+1}+x_{k+2})/2$ при $k=1,3,\ldots,n-3$,
$y_k=(x_{k-1}-x_k+x_{k+1})/2$ при $k=2,4,\ldots,n-2$,
$y_{n-1}=(x_{n-1}+x_n)/2$, $y_n=(x_{n-1}-x_n)/2$;
если n нечетно: $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\ldots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2$,
$y_k=(x_k+x_{k+1}+x_{k+2})/2$ при $k=1,3,\ldots,n-2$,
$y_k=(x_{k-1}-x_k+x_{k+1})/2$ при $k=2,4,\ldots,n-1$,
$y_n=x_n$;

15) $\frac{n-1}{n}y_1^2+\frac{n-2}{n-1}y_2^2+\ldots+\frac{2}{3}y_{n-2}^2+\frac{1}{2}y_{n-1}^2$;
$y_1=x_1-\frac{1}{n-1}(x_2+x_3+\ldots+x_n)$, $y_2=x_2-\frac{1}{n-2}(x_3+x_4+\ldots+x_n),\ldots$
$y_{n-1}=x_{n-1}-x_n$, $y_n=x_n$;

16) $(n-1)y_1^2-y_2^2-y_3^2-\ldots-y_n^2$;
$y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)$, $y_2=\frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)$,
$y_3=\frac{1}{2}(-x_1-x_2+x_3+\ldots+x_n),\ldots,y_n=\frac{1}{2}(-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}+x_n)$;

17) y_1^2; $y_1=2x_1-3ix_2$, $y_2=x_2$;

18) $y_1^2+(1-2i)y_2^2$; $y_1=3x_1+4(1+i)x_2$, $y_2=4x_2$;

19) $\frac{i}{4}(y_1^2 - y_2^2)$; $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$;
20) $(1+i)y_1^2 + iy_2^2 + (2-i)y_3^2$; $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$;
21) $y_1^2 + iy_2^2$; $y_1 = x_1 + (1-i)x_2 + x_3$, $y_2 = 2x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$;
22) $-y_1^2$; $y_1 = x_1 + 2ix_2 + (1-i)x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$.

Указание. 15) Представить форму в виде $\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{2}{n}\sum_{k<j} x_k x_j$ и применить метод индукции.

67.14. 1) $x_1 = y_1 - 3y_2 - 6y_3$, $x_2 = y_2 + 3y_3$, $x_3 = y_3$;
2) $x_1 = 2\sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + 5y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + y_3$, $x_3 = y_3$;
3) $x_1 = y_3$, $x_2 = \sqrt{2}y_2 + y_3$, $x_3 = \sqrt{2}y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}y_2 - (3 + \frac{3}{\sqrt{2}})y_3$.

67.15. 1) Формы f_1 и f_3 эквивалентны, но ни одна из них не эквивалентна f_2; 2) формы f_2 и f_3 эквивалентны, но ни одна из них не эквивалентна f_1.

67.16. n^2. Указание. Показать, что полярная билинейная форма $\operatorname{tr}(XY)$ невырождена.

67.16.1. $\mathcal{A}(X,Y) = (\operatorname{tr}(AXY) + \operatorname{tr}(AYX))/2$.

67.16.2. $\mathcal{A}(X,Y) = \operatorname{tr}(AXAY)$. Указание. Показать, что ранг квадратичной формы равен рангу оператора $\mathcal{G}X = AXA$.

67.17. $I = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3 + 8x_4y_4$ в базисе 1, $\sqrt{3}t$, $\sqrt{5}(3t^2-1)$, $\sqrt{7}(5t^3-3t)$.

67.18. $I = 2x_2y_2 + \frac{8}{3}x_3y_3 + \frac{8}{5}x_4y_4$ в базисе 1, t, t^2, $t^3 - t$.

§68

68.1. 1) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; 2, 1, 1; 2) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; 1, 2, -1;
3) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; 3, 0, 3; 4) $-y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; 1, 2, -1;
5) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; 2, 1, 1; 6) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; 3, 1, 2.

68.2. 1) Если $n = 2k$, то $\pi = \nu = k$, если $n = 2k+1$, то $\pi = k+1$, $\nu = k$;
2) $\pi = n$, $\nu = 0$; 3,4) $\pi = 1$, $\nu = n-1$; 5) $\pi = n$, $\nu = 0$.

68.3. Указание. Использовать результат задачи 64.56.

68.4. Указание. Использовать результат предыдущей задачи.

68.5. 1) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; 1, 2, -1; 2) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; 2, 2, 0;
3) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; 1, 3, -2; 4) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2$; 2, 3, -1;
5) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$; 3, 1, 2.

68.7. Нет.

68.8. Нет. Указание. В доказательстве необходимости использовать положительно определенную при всех $\varepsilon > 0$ квадратичную форму $\mathcal{B}(x,x) = \mathcal{A}(x,x) + \varepsilon(x,x)$, а для достаточности привлечь характеристический многочлен матрицы формы и теорему 57.2. Рассмотреть пример: $f = -x_2^2 + 2x_1x_3$.

68.9. 1) $\lambda > 1$; 2) $\lambda > 2$; 3) $\lambda > 8$; 4) $|\lambda| < \sqrt{5/3}$; 5) $-4/5 < \lambda < 0$;
6) $\lambda \in \varnothing$; 7) $\lambda \in \varnothing$; 8) $\lambda \in \varnothing$; 9) $\lambda < -6$.

68.10. Форма приведется к виду $y_1^2 + g(y_2, \ldots, y_n)$, где g – квадратичная форма от переменных $y_2, \ldots, y_n$.

68.11. Указание. См. задачу 65.39.

68.12. Все формы положительно определены, соответствующими треугольными преобразованиями будут следующие преобразования:

1) $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$;

2) $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$;

3) $y_1 = x_1 - x_3 - 2x_4$, $y_2 = 2x_2 + x_3$, $y_3 = 3x_3 + 2x_4$, $y_4 = 4x_4$.

68.15. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

68.16. Указание. Сравнить с задачей 65.40.

68.17. 1) $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

68.19. Указание. При доказательстве достаточности учесть критерий задачи 68.8, затем, используя нормальный вид соответствующей A квадратичной формы, получить разложение $A = Q^T D Q$, где $D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

68.20. Указание. Перейти к каноническому виду билинейной формы.

68.21. Указание. См. предыдущую задачу.

68.22. Указание. Если $\exists x \in V : \mathcal{A}(x, x) \neq 0$, то $\alpha = 1$. Если $\forall x \in V : \mathcal{A}(x, x) = 0$, то показать, что $\mathcal{A}(x, y) = -\mathcal{A}(y, x)$ $\forall x, y \in V$.

68.23. Указание. Если $\mathcal{A}(x, x) \equiv 0$, то, рассматривая $\mathcal{A}(x + y, x + y)$, показать, что $\mathcal{A}(x, y) = -\mathcal{A}(y, x)$ $\forall x, y \in V$. В противном случае для каждого $x \in V : \mathcal{A}(x, x) \neq 0$, и учитывая, что выражение $\mathcal{A}(x, \beta x + y)$ обращается в нуль, показать, что $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$ $\forall y \in V$. Если же $y, z \in V$ таковы, что $\mathcal{A}(y, y) = \mathcal{A}(z, z) = 0$, то сначала для $x \in V : \mathcal{A}(x, x) \neq 0$ указать $\alpha_0 \neq 0$ так, что $\mathcal{A}(x + \alpha_0 y, x + \alpha_0 y) \neq 0$, а затем, рассматривая выражение $\mathcal{A}(x + \alpha_0 y, \beta(x + \alpha_0 y) + z)$, показать, что $\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{A}(z, y)$.

68.24. Указание. Предположить, что $l_1(y) \neq 0$, $l_2(z) \neq 0$, и рассмотреть вектор $y + z$.

68.25. Указание. Доказать, что если $\mathcal{A}(x, y) \neq 0$, то $\dfrac{l_1(x)}{l_2(x)} = \dfrac{l_1(y)}{l_2(y)} = \lambda \neq 0$. Рассмотреть произведение $(l_1(x) - \lambda l_2(x)) l_2(x)$ и применить задачу 68.24.

68.26. Ранг – четное число, сигнатура равна нулю.

68.27. Указание. Использовать канонический вид квадратичной формы.

68.28. Указание. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – канонический базис, в котором квадратичная форма f имеет нормальный вид, причем $f(e_i) = 1$, $i = \overline{1, p}$, $f(e_j) = -1$, $j = \overline{p+1, r}$, $f(e_k) = 0$, $k = \overline{r+1, n}$. Рассмотреть векторы $e_i \pm e_j$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{p+1, r}$.

68.30. 1) $\begin{bmatrix} -i \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 3 & 4i \\ -5 & i \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -3i & 2 \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1+i & -5 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & -5 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4+i & 0 & 2+i \end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2-5i \\ 3 & -6 & 4i \\ 2+5i & -4i & 3 \end{bmatrix}$; 9) I; 10) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

68.31. 6) $(1+i)x_1\overline{x_2} + (1-i)x_2\overline{x_1} + 5|x_2|^2$;

8) $2|x_1|^2 + 3x_1\overline{x_2} + 3x_2\overline{x_1} + (2-5i)x_1\overline{x_3} + (2+5i)x_3\overline{x_1} - 6|x_2|^2 + 4ix_2\overline{x_3} - 4ix_3\overline{x_2} + 3|x_3|^2$;

9) $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$; 10) $\sum\limits_{k \neq j} x_k\overline{x_j}$.

68.32. $\mathcal{A}(x,y) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}(x+y, x+y) - \mathcal{A}(x,x) - \mathcal{A}(y,y)) + \frac{i}{2}(\mathcal{A}(x+iy, x+iy) - \mathcal{A}(x,x) - \mathcal{A}(y,y))$.

§69

69.1. 1) $4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$; 2) $6y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; 3) $y_1^2 + \sqrt{3}y_2^2 - \sqrt{3}y_3^2$;
4) $3y_1^2 + (1+\sqrt{17})y_2^2 + (1-\sqrt{17})y_3^2$; 5) $-y_1^2 - 7y_2^2 + 5y_3^2$; 6) $-7y_1^2 + 2y_2^2$;
7) $y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - y_4^2$; 8) $10y_1^2$.

69.2. 1) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = (2y_1 - y_2 + 2y_3)/3$, $x_2 = (2y_1 + 2y_2 - y_3)/3$, $x_3 = (-y_1 + 2y_2 + 2y_3)/3$;

2) $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = (2y_1 + 2y_2 - y_3)/3$, $x_2 = (-y_1 + 2y_2 + 2y_3)/3$, $x_3 = (2y_1 - y_2 + 2y_3)/3$;

3) $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2$;

4) $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = (y_1 - 2y_2 + 2y_3)/3$, $x_2 = (2y_1 - y_2 - 2y_3)/3$, $x_3 = (2y_1 + 2y_2 + y_3)/3$;

5) $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3$, $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y_2$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_3$;

6) $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_3$;

7) $2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_4^2$; $x_1 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/2$, $x_2 = (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)/2$, $x_3 = (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)/2$, $x_4 = (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)/2$;

8) $4y_1^2 + 8y_2^2 + 12y_3^2 - 4y_4^2$; $x_1 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/2$, $x_2 = (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)/2$, $x_3 = (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)/2$, $x_4 = (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)/2$;

9) $5y_1^2 - 5y_2^2 + 5y_3^2$; $x_1 = (2y_1 + y_2)/\sqrt{5}$, $x_2 = (y_1 - 2y_2)/\sqrt{5}$, $x_3 = (2y_3 + y_4)/\sqrt{5}$, $x_4 = (-y_3 + 2y_4)/\sqrt{5}$;

10) $2y_1^2 - 4y_2^2$; $x_1 = (y_1 + y_3)/\sqrt{2}$, $x_2 = (y_1 - y_3)/\sqrt{2}$, $x_3 = (y_2 + y_4)/\sqrt{2}$, $x_4 = (y_2 - y_4)/\sqrt{2}$;

11) $9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = y_1$, $x_2 = (y_2 + 2y_3 + 2y_4)/3$, $x_3 = (2y_2 + y_3 - 2y_4)/3$, $x_4 = (2y_2 - 2y_3 + y_4)/3$;

12) $5y_1^2+5y_2^2+5y_3^2-8y_4^2$; $x_1=(2y_1+y_5)/\sqrt{5}$, $x_2=(-y_1+2y_5)/\sqrt{5}$, $x_3=y_3$, $x_4=(2y_2+3y_4)/\sqrt{13}$, $x_5=(3y_2-2y_4)/\sqrt{13}$;

13) $4y_1^2+4y_2^2+4y_3^2-6y_4^2-6y_5^2$; $x_1=y_1$, $x_2=(y_2+2y_4)/\sqrt{5}$, $x_3=(-2y_2+y_4)/\sqrt{5}$, $x_4=(y_3+3y_5)/\sqrt{10}$, $x_5=(3y_3-y_5)/\sqrt{10}$;

14) $5y_1^2-5y_2^2+5y_3^2-5y_4^2+5y_5^2$; $x_1=(2y_1+y_2)/\sqrt{5}$, $x_2=(y_1-2y_2)/\sqrt{5}$, $x_3=(3y_3+y_4)/\sqrt{10}$, $x_4=(-y_3+3y_4)/\sqrt{10}$, $x_5=(2y_5+y_6)/\sqrt{5}$, $y_6=(y_5-2y_6)/\sqrt{5}$;

15) $\frac{n+1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\ldots+\frac{1}{2}y_n^2$; $y_1=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, $y_i=\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}(x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}-(i-1)x_i)$, $i=\overline{2,n}$;

16) $\frac{n-1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-\ldots-\frac{1}{2}y_n^2$; преобразование можно взять то же, что и в предыдущем пункте.

69.4. Матрица с положительными угловыми минорами ортогональна тогда и только тогда, когда она единичная.

69.5. Если $x_1,\ldots,x_n$ – координаты вектора x в ортонормированном базисе $e_1,\ldots,e_n$, где $e_1,\ldots,e_r$ составляют базис L, то $k(x)=x_1^2+\ldots+x_r^2$.

69.6. 1) $|y_1|^2+3|y_2|^2$; $x_1=(y_1-iy_2)/\sqrt{2}$, $x_2=(-iy_1+y_2)/\sqrt{2}$;

2) $6|y_1|^2-4|y_2|^2$; $x_1=\frac{3+4i}{5\sqrt{2}}(y_1+y_2)$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1-y_2)$;

3) $2|y_1|^2+4|y_2|^2-5|y_3|^2$; $x_1=(y_1+iy_2)/\sqrt{2}$, $x_2=(iy_1+y_2)/\sqrt{2}$, $x_3=y_3$;

4) $3|y_1|^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_3$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_3$, $x_3=\frac{i}{\sqrt{3}}y_1-\frac{i}{\sqrt{2}}y_2+\frac{i}{\sqrt{6}}y_3$;

5) $4|y_1|^2+8|y_2|^2+12|y_3|^2+16|y_4|^2$; $x_1=(-y_1+y_3+(1-i)y_4)/2$, $x_2=(y_2+(1+i)y_3-y_4)/2$, $x_3=(y_1-(1-i)y_2+y_3)/2$, $x_4=((1+i)y_1+y_2+y_4)/2$.

69.8. Указание. Найти канонические коэффициенты соответствующей квадратичной формы.

69.9. См. указание к предыдущей задаче.

69.11. Указание. Применить предыдущую задачу.

69.12. Указание. Воспользоваться формулами Виета и тем, что многочлены с подобными коэффициентами не имеют отрицательных корней.

69.13. Указание. Показать, что корни λ-уравнения не меняются при невырожденном преобразовании обеих форм.

69.15. Нельзя в обоих пунктах. Указание. Найти корни соответствующих λ-уравнений.

69.16. При подходящей нумерации выполнены соотношения: $\lambda_i\mu_i=1$, $i=\overline{1,n}$.

69.17. 1) $f=-2y_1^2+\frac{2}{3}y_2^2$; 2) $f=4y_1^2-2y_2^2$; 3) $f=5y_1^2$; 4) $f=y_1^2+4y_2^2$; 5) $f=\frac{49}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2$; 6) $f=9y_1^2-y_2^2$; 7) $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$; 8) $f=y_1^2+2y_2^2+2y_3^2-7y_4^2$.

69.18. 1) $f=y_1^2+y_2^2$, $g=5y_1^2-4y_2^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-y_2$, $x_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}y_1+\frac{2}{3}y_2$;

2) $f=\frac{29}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2$, $g=y_1^2+y_2^2$; $x_1=\sqrt{5}y_1$, $x_2=-\frac{3}{\sqrt{5}}y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_2$;

3) $f = y_1^2 + y_2^2$, $g = y_1^2 + 7y_2^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}y_2$;

4) $f = y_1^2 + y_2^2$, $g = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2$, $x_2 = \sqrt{3}y_1 + \frac{3}{\sqrt{6}}y_2$;

5) $f = 26y_1^2$, $g = y_1^2 + y_2^2$; $x_1 = -\frac{5}{\sqrt{26}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}y_2$, $x_2 = \frac{21}{\sqrt{26}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}y_2$;

6) $f = y_1^2 + y_2^2$, $g = -10y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$; $x_1 = \frac{4}{\sqrt{13}}y_1 + \frac{1}{2\sqrt{13}}y_2$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{13}}y_1 + \frac{3}{2\sqrt{13}}y_2$;

7) $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $g = 5y_1^2 + 2y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y_2 + \sqrt{2}y_3$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y_2$;

8) $f = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $g = -5y_1^2 - 2y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = (11y_1 - 14y_2 + 13y_3)/3$, $x_2 = (2y_1 - 5y_2 + 4y_3)/3$, $x_3 = (2y_1 - 2y_2 + y_3)/3$;

9) $f = 3y_1^2 + 2y_2^2$, $g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3$;

10) $f = 5y_1^2 - y_2^2 - 5y_3^2$, $g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{5}{4\sqrt{3}}y_2 + \frac{7}{4\sqrt{5}}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}y_2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y_3$, $x_3 = -\frac{1}{4\sqrt{3}}y_2 + \frac{\sqrt{5}}{4}y_3$;

11) $f = 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$, $g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_2 = \sqrt{3}y_3$, $x_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{3}}y_3$;

12) $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $g = 14y_1^2$; $x_1 = \frac{2}{\sqrt{14}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{8}{\sqrt{70}}y_3$, $x_2 = \frac{4}{\sqrt{14}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{70}}y_3$, $x_3 = \frac{3}{\sqrt{14}}y_1 + \frac{5}{\sqrt{70}}y_3$;

13) $f = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$, $g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; $x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, $x_2 = y_2 + y_3 + y_4$, $x_3 = y_3 + y_4$, $x_4 = y_4$;

14) $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2$, $g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; $x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, $x_2 = (y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4)/2$, $x_3 = y_3 + y_4$, $x_4 = (-y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/2$.

69.20. Указание. Проанализировать соотношение $S^TAS = (S^TBS)D$, эквивалентное данному в задаче, и показать, что матрицы S^TAS и S^TBS квазидиагональные и имеют согласованную блочную структуру.

69.21. Указание. Воспользоваться задачей 62.49.

69.22. 1) $f = y_1^2 + y_2^2 + 16y_3^2$, $g = 2y_2^2 - 3y_3^2$; $y_1 = (2x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{6}$, $y_2 = (-x_2 + x_3)/\sqrt{2}$, $y_3 = (-x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{3}$;

2) $f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$, $g = 6y_3^2$; $y_1 = (x_2 - x_3)/\sqrt{2}$, $y_2 = (x_1 - x_2 - x_3)/\sqrt{3}$, $y_3 = (2x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{6}$;

3) $f = 3y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$, $g = -6y_1^2 + 6y_2^2$; $y_1 = (x_1 - x_2 + x_3)/\sqrt{3}$, $y_2 = (x_1 - x_3)/\sqrt{2}$, $y_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)/\sqrt{6}$;

4) $f = 5y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, $g = y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; $y_1 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2$, $y_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/2$, $y_3 = (x_1 - x_3)/\sqrt{2}$, $y_4 = (x_2 - x_4)/\sqrt{2}$.

69.23. Указание. Показать, что при ортогональном преобразовании характеристический многочлен матрицы квадратичной формы не изменяется.

69.24. 1) Формы f и h ортогонально эквивалентны, но ни одна из них не является ортогонально эквивалентной форме g; 2) формы не являются попарно ортогонально эквивалентными.

69.25. Указание. Так как матрица A^TA положительно определена, то существуют верхняя треугольная матрица S с диагональными элементами, равными 1, и диагональная матрица D с положительными элементами на главной диагонали такие, что $A^TA = S^TDS$. Переписать последнее равенство в виде $A^TA = (D^{1/2}S)^T(D^{1/2}S)$ и положить $R = D^{1/2}S$. Если матрица A имеет два представления $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$, то матрица $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$ одновременно ортогональная и треугольная с положительными диагональными элементами, и значит, она единичная.

69.26. Указание. а) Так как матрица A^TA положительно определена, то существуют ортогональная матрица P и диагональная матрица D с положительными элементами на главной диагонали такие, что $A^TA = P^TDP$. Тогда матрица $B_1 = P^TD^{1/2}P$ является квадратным корнем из матрицы A^TA, а матрица $Q_1 = AB_1^{-1}$ ортогональна. Единственность матрицы B_1 следует из единственности квадратного корня из матрицы A^TA. в) Утверждения следуют из единственности представлений, указанных в пунктах "а)" и "б)".

§70

70.1. Да. **70.2.** Нет.

70.3. Да, только если $\rho(t) \geq 0$ и $\rho(t) \not\equiv 0$. **70.4.** Да.

70.11. Указание. Показать, что равенство $(x, y)_* = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ задает в V скалярное произведение.

70.12. Указание. Рассмотреть векторы $x = (1, 0)$ и $y = (0, 1)$.

70.13. Указание. Использовать неравенство:

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^p + \left(\frac{1-z}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(1+z^p),$$

верное для всех $p \geq 2$ и $z \in [0, 1]$, и неравенство

$$\left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p/(p-1)} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} \leq \frac{1}{2}(|u|^p + |v|^p),$$

верное для всех $p \in (1, 2]$ и $u, v \in \mathbb{R}$.

70.19. Указание. Воспользоваться неравенством Гёльдера.

70.20. $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$, где n – размерность пространства.

70.20.1. Указание. а) Пусть без ограничения общности: $|x_1| = \ldots = |x_m| > |x_{m+1}| \geq \ldots \geq |x_n|$. Тогда $\|x\|_p = |x_1| \cdot \left(m + |\frac{x_{m+1}}{x_1}|^p + \ldots + |\frac{x_n}{x_1}|^p\right)^{1/p}$.

Показать, что функция $\varphi(p) = p^{-1}\ln(m + \alpha_{m+1}^p + \ldots + \alpha_n^p)$ убывает, если $0 \leq \alpha_k < 1$ $\forall k = \overline{m+1, n}$.

б) К сумме $\sum_{i=1}^n (|x_i^p| \cdot 1)$ применить неравенство Гёльдера.

70.21. Константа c_1 равна наименьшему, а константа c_2 – наибольшему сингулярному числу матрицы A.

70.24. Указание. Показать, что такая норма может быть введена равенством $\|x\| = \rho(x, \theta)$.

70.28. Евклидова норма двойственна к себе относительно порождающего ее скалярного произведения.

70.29. Нормы $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$ двойственны друг к другу.

70.30. Неравенство Гёльдера.

70.31. Двойственная норма определяется равенством $\|x\|^* = \|(\mathcal{B}^*)^{-1}x\|_q$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ при $p > 1$ и $q = \infty$ при $p = 1$.

70.32. а) $\|x\|_p^* = \|\mathcal{A}x\|_q$; б) $\|x\|^* = \|(\mathcal{B}^*)^{-1}\mathcal{A}x\|_q$, где q такое же, как и в предыдущей задаче.

70.34. Указание. Использовать задачу 70.27.

§71

71.2. Указание. Пусть $\|\mathcal{A}\|$ – подчиненная норма в $\mathcal{L}(V, W)$. Тогда в силу эквивалентности норм $\exists\alpha > 0$: $\forall\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ выполнено неравенство $\alpha M(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|$. Рассмотреть $\alpha_0 = \alpha/2$.

71.4. Указание. Пусть $\|\mathcal{A}\|$ – подчиненная норма в $\mathcal{L}(V, W)$. Тогда в силу эквивалентности норм $\exists\alpha > 0$: $\forall\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ выполнено неравенство $\|\mathcal{A}\| \leq \alpha M(\mathcal{A})$. Показать, что норма $N(\mathcal{A}) = \alpha M(\mathcal{A})$ согласована.

71.5. Указание. Пусть $\|\mathcal{A}\|$ – подчиненная норма в $\mathcal{L}(V, W)$. Использовать тот факт, что $\exists\alpha > 0$: $\forall\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ выполнено неравенство $\alpha\|\mathcal{A}\| \leq M(\mathcal{A})$.

71.9. Нет. Указание. Рассмотреть норму $N(A) = \max\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\}$.

71.10. Указание. Учесть, что $K(I) = n > 1$.

71.12. Указание. а) Рассмотреть матрицу A, все элементы которой равны единице; б,в) найти значение $M(I)$.

71.13. Указание. Рассмотреть норму $n(x)$ вектор-столбца $x \in \mathbb{C}^n$, задаваемую равенством $n(x) = \|\,[\;x\;\;0\;\;\ldots\;\;0\;]\,\|$.

71.14. а) Наибольший из модулей диагональных элементов; б) наибольшая из спектральных норм диагональных клеток.

71.15. В обоих пунктах евклидова норма равна $\sqrt{n}$, а спектральная норма равна единице.

71.16. $\sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}$.

71.19. Указание. Пусть проектор $\mathcal{P}$ на L_1 параллельно L_2 не является оператором ортогонального проектирования. Тогда в силу результата задачи 61.30а $L_2^\perp \neq L_1$ и, так как $\dim L_2^\perp = \dim L_1$, найдется $f \in L_2^\perp \setminus L_1$. Следовательно, в его разложении $f = g + h$, где $g \in L_1$, $h \in L_2$, вектор h ненулевой. Имеем: $\|\mathcal{P}f\|_E^2 = \|g\|_E^2 = \|f\|_E^2 + \|h\|_E^2 > \|f\|_E^2 \Longrightarrow \|\mathcal{P}\|_2 > 1$.

71.21. Указание. Использовать связь евклидовой и спектральной норм матрицы с ее сингулярными числами и результат задачи 66.43.

71.22. Указание. а) Учесть соотношения: $\rho(A^HA) \leq \|A^HA\|_1, \|A^H\|_1 = \|A\|_\infty$, справедливые в силу теорем 71.6–71.8; б) учесть неравенство $\rho(A^HA) \leq \operatorname{tr}(A^HA)$.

71.23. Указание. Использовать соотношения $H_1 = (A+A^H)/2$, $H_2 = (A-A^H)/(2i)$.

71.24. Действительная (мнимая) часть комплексного числа z является ближайшей к z точкой действительной (мнимой) оси.

71.25. Если $z = x + iy$ – алгебраическая форма записи числа z, то $|z|^2 = x^2 + y^2$.

71.26. Если $A \geq O$, то утверждение верно, однако соответствующие унитарные матрицы могут быть определены неоднозначно. Указание. Для любой унитарной матрицы U имеем: $\|A-U\|_E^2 = \operatorname{tr}((A-U)^H(A-U)) = \operatorname{tr} A^2 + n - 2\operatorname{Re}\operatorname{tr}(AU)$. Согласно задаче 66.44: $|\operatorname{Re}\operatorname{tr}(AU)| \leq \operatorname{tr} A$, причем равенство достигается лишь при $U = \pm I$.

71.27. Для числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ число $\omega_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$ является ближайшей, а число $\omega_2 = -\cos\varphi - i\sin\varphi$ – наиболее удаленной точкой единичной окружности.

71.28. Указание. Использовать задачи 66.43 и 66.44.

71.29. Указание. Показать, что для неотрицательной матрицы A выполнено: $S(A) = \operatorname{tr} A$.

71.30. Указание. Воспользоваться непрерывностью нормы.

71.31. Указание. Использовать определение двойственности друг к другу векторных норм, соответствующих операторным нормам, участвующим в левой и правой частях этих равенств.

71.32. Указание. Использовать предыдущую задачу.

71.33. а) 1; б) $(n+1)^{(p-1)/p}$ при $p > 1$ и 1 при $p = 1$;

в) $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} k^{p/(p-1)}\Big)^{(p-1)/p}$ при $p > 1$ и n при $p = 1$;

г) $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^{-p/(p-1)}\Big)^{(p-1)/p}$ при $p > 1$ и 1 при $p = 1$;

д) $\Big(\sum\limits_{k=2}^{n+1} k^{-p/(p-1)}\Big)^{(p-1)/p}$ при $p > 1$ и $1/2$ при $p = 1$.

Указание. Использовать предыдущую задачу.

71.34. а) 1; б) $\sqrt{n+1}$; в) $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$; г) $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^{-2}}$; д) $\sqrt{\sum\limits_{k=2}^{n+1} k^{-2}}$.

Указание. Учесть, что если $f(x) = (x,h)$, то $f^*(\alpha) = \alpha h$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, и следовательно, $ff^*(1) = \|h\|_E$. Тем самым, $\|f\| = \|h\|_E$.

71.35. 1. **71.36.** $\max\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|$ во всех пунктах.

71.37. Нет. Указание. б) Вычислить обе части неравенства на квазидиагональной матрице $\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, 1, \ldots, 1\right)$.

71.39. $N(A) = M(PAP^{-1})$.

71.41. Если $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, то

$$\|A\|_\infty = \big(\max_k |x_k|\big) \sum_{k=1}^{n} |y_k|.$$

71.42. Указание. Воспользоваться задачей 71.40.

71.43. Указание. Воспользоваться представлением $Ax = (x, A^*e)e$ и предыдущей задачей.

71.45. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

71.46. Указание. Использовать представление подчиненной нормы из задачи 71.49.

71.48. Указание. Воспользоваться задачей 71.40.

71.49. Указание. Воспользоваться задачей 71.40, представив матрицу B ранга 1 в виде $B = xy^H$.

71.51. Указание. Учесть, что в силу задачи 71.13 матричная норма $\|A\|$ согласована хотя бы с одной векторной нормой, и рассмотреть норму вектора Ax, где x – собственный вектор матрицы A.

71.54. Указание. Рассмотреть нильпотентную ненулевую матрицу.

71.55. Например, круг $|z| \leq \sqrt{5} + \sqrt{2}$. Указание. Воспользоваться результатом задачи 71.51 с подходящей матричной нормой.

71.57. Указание. Доказать, что матрица положительно определена, и использовать результат задачи 64.56.

71.60. Указание. В силу теоремы Шура существуют такие унитарная матрица U и верхняя треугольная матрица B, что $A = UBU^H$, причем на главной диагонали матрицы B стоят собственные значения матрицы A. Положим $D_t = \operatorname{diag}(t, t^2, \ldots, t^n)$. Тогда непосредственным вычислением можно убедиться в том, что сумма модулей всех элементов матрицы $D_t B D_t^{-1}$, расположенных выше главной диагонали, при достаточно больших $t > 0$ не будет превосходить ε. Поэтому $\|D_t B D_t^{-1}\|_1 \leq \rho(A) + \varepsilon$ и в силу задачи 71.7, пункт "в)" матричную норму A можно определить равенством:

$$\|A\| = \|D_t U^H A U D_t^{-1}\|_1 \equiv \|(UD_t^{-1})^{-1} A (UD_t^{-1})\|_1.$$

71.61. Указание. Повторить рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущей задаче, и учесть, что $\|B\|_2^2 = \rho(B^H B)$.

71.62. Указание. Рассмотреть матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

71.64. Нет, неверно.

71.65. Указание. Показать, что $\|A^k\| \to 0$, и, воспользовавшись эквивалентностью норм, перейти к $\|A^k\|_\infty$.

71.66. Указание. При доказательстве необходимости рассмотреть $A^k x$ на каждом собственном векторе x матрицы A. Для обоснования достаточности использовать результаты задач 71.60 и 71.65.

71.69. Указание. Во-первых, из соотношений $[\rho(A)]^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$ вытекает, что $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$. Во-вторых, для любого $\varepsilon > 0$ спектральный радиус матрицы $B = [\rho(A) + \varepsilon]^{-1} A$ меньше единицы, и следовательно, B – сходящаяся матрица (задача 71.66). Поэтому, начиная с некоторого номера k, выполнено неравенство $\|B^k\| < 1$. Отсюда $\|A^k\| \leq [\rho(A) + \varepsilon]^k$.

71.71. Указание. Достаточность следует из соотношения задачи 71.69. Для доказательства необходимости использовать цепочку соотношений: $\|A\|^k = [\rho(A)]^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k$.

71.72. Указание. Показать, что частичные суммы матричного ряда образуют последовательность Коши.

71.74. Нет.

71.79. Указание. Использовать теорему Шура о приведении к треугольному виду.

71.80. Указание. Учесть, что унитарная матрица U унитарно подобна диагональной матрице.

71.81. Это возможно для любых матриц A.

71.86. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Указание. а) Представить B в виде $B = I - A$ и показать, что $B^{-1} = I + A + A^2$; б) подобрать диагональную матрицу D так, чтобы все диагональные элементы матрицы DB были равны единице.

71.90. Указание. Использовать соотношение $A + B = A(I + A^{-1}B)$ и показать, что если $\|A^{-1}B\| < 1$, то матрица $A + B$ обратима.

71.91. Указание. Диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ обратима. Показать, что у матрицы $B = I - D^{-1}A$ норма $\|B\|_\infty$ меньше единицы, и воспользоваться задачей 71.84.

71.92. Указание. Использовать задачу 71.53.

71.93. Указание. Использовать теорему Шура и задачу 71.20.

71.94. Указание. Пусть $A = A_1 + iA_2$ – эрмитово разложение матрицы A и $B = U^H AU$ – верхняя треугольная форма матрицы A (теорема Шура). Тогда эрмитово разложение матрицы B имеет вид $B = U^H A_1 U + iU^H A_2 U$. Использовать для каждой из матриц $U^H A_k U$ неравенство Шура предыдущей задачи.

71.95. Указание. Неравенства переходят в равенства тогда и только тогда, когда соответствующие по теореме Шура треугольные матрицы диагональны.

71.96. Для матриц A простой структуры. Указание. Использовать рассуждения, аналогичные проведенным в доказательстве задачи 71.60.

71.97. Указание. Согласно 57.85 матрицы AB и BA имеют одинаковые собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Так как AB – нормальная матрица, то $\|AB\|_E^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$. Показать, пользуясь определением евклидовой нормы, что $\|BA\|_E = \|AB\|_E$.

71.98. Указание. Из представления задачи 66.44 следует, что для любой унитарной матрицы W: $|\operatorname{tr}(AW)| \leq \rho_1 + \ldots + \rho_n$. Пусть $B = U^H AU$ – треугольная форма Шура матрицы A. Тогда $\operatorname{tr}(AW) = \operatorname{tr}(BU^H WU)$. Выберем W из условия $U^H WU = D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, где $b_{kk}d_k = |b_{kk}| = |\lambda_k|$. Тогда $\operatorname{tr}(AW) = |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|$.

71.99. Указание. Использовать задачи 71.11, 71.28 и 71.98.

71.100. Указание. Пользуясь задачей 71.90, доказать, что если матрица $A + B$ вырождена, то $\|B\|_2 \geq \rho_n$. Показать, что равенство $\|B\|_2 = \rho_n$ выполнено для матрицы $B = UDV$, где $D = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, -\rho_n)$, а унитарные матрицы U, V участвуют в сингулярном разложении матрицы A: $A = U\Lambda V$.

71.101. а) $(5 + 3\sqrt{5})/2$, $(5 - 3\sqrt{5})/2$; б) 9, −2; в) 5, −7.

71.102. Минимальное и максимальное собственные значения оператора $B^{-1/2}AB^{-1/2}$.

71.103. а) 1/8, −1/16; б) 1/4, −1/8; в) 4, −3/2.

§72

72.1. $(0,0,0,0,0,0)^T$. **72.2.** $(1/2,0,1/2)^T$. **72.3.** $(3,1,3)^T$.
72.4. $(1,-1,-1,1)^T$. **72.5.** $(3,7,-4,-4)^T$.
72.6. $(1/3,-2/3,1,-4/3)^T$.
72.7. $(2,1,0,-1)^T$ – точка минимума.
72.8. $(7/5,0,1/5)^T$ – точка минимума.
72.9. $(9/2,-9/2,1/2)^T$ – точка минимума.
72.10. $(-3/2,-5/6,3,1/2)^T$ – точка максимума.
72.10.1. $(-2,2,-1)^T$ – точка минимума.
72.10.2. $(-1,-6,2)^T$ – точка минимума.
72.10.3. $(3,4,0,-3)^T$ – точка минимума.
72.11. а) a^2/n при $x_1=\ldots=x_n=a/n$;
б) $\dfrac{6a^2}{n(n+1)(2n+1)}$ при $x_1=x_2/2=\ldots=x_n/n=\dfrac{6a}{n(n+1)(2n+1)}$;
в) $\dfrac{a^2(q^2-1)}{q^2(q^{2n}-1)}$ при $x_1=x_2/q=\ldots=x_n/q^{n-1}=\dfrac{a(q^2-1)}{q(q^{2n}-1)}$.
72.12. $\dfrac{2a^2}{n(n+1)}$ при $x_1=\ldots=x_n=\dfrac{2a}{n(n+1)}$.
72.13. Указание. Применить альтернативу Фредгольма.
72.14. Указание. Применить теорему Фредгольма.
72.17. а) Ни для одного $\mathbf{a}\in V_3$ уравнение не имеет решения при любой правой части; б) $(\mathbf{b},\mathbf{a})=0$.
72.18. Если векторы $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ таковы, что $[\mathbf{z}_1,\mathbf{a}_1]=[\mathbf{z}_2,\mathbf{a}_2]$, то они удовлетворяют соотношению $(\mathbf{z}_1,\mathbf{b}_1)=(\mathbf{z}_2,\mathbf{b}_2)$.
72.22. Если $g(t)=a_nt^n+g_{n-1}(t)$, где $\deg g_{n-1}\le n-1$, то искомые псевдорешения суть все первообразные многочлена $g_{n-1}(t)$. Нормальное псевдорешение $f(t)$ удовлетворяет условию $f(0)=0$.
72.23. Если многообразие псевдорешений записать в виде $z_0+\ker\mathcal{A}$, где z_0 – нормальное псевдорешение, то соответствующими множествами псевдорешений будут следующие многообразия: а) $\dfrac{1}{\alpha}z_0+\ker\mathcal{A}$; б) $\alpha z_0+\ker\mathcal{A}$; в) $z_0+\ker\mathcal{A}$.
72.24. Если z_0 – нормальное псевдорешение уравнения $\mathcal{A}z=u$, то соответствующими нормальными псевдорешениями будут векторы: а) z_0; б) $\mathcal{U}^*z_0$.
72.25. Пусть $r=\operatorname{rg}\mathcal{A}$ и собственные векторы $e_1,\ldots,e_r$ отвечают ненулевым собственным значениям $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$. Если $u=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_re_r+\alpha_{r+1}e_{r+1}+\ldots+\alpha_ne_n$, то псевдорешения суть векторы $\dfrac{\alpha_1}{\lambda_1}e_1+\ldots+\dfrac{\alpha_r}{\lambda_r}e_r+\beta_{r+1}e_{r+1}+\ldots+\beta_ne_n$, $\forall\beta_{r+1},\ldots,\beta_n\in\mathbb{C}$, а нормальное псевдорешение – вектор $\dfrac{\alpha_1}{\lambda_1}e_1+\ldots+\dfrac{\alpha_r}{\lambda_r}e_r$.
72.28. $(0,0,0)^T$. **72.29.** $(0,0)^T$. **72.30.** $\dfrac{3}{4}(1,1,1,1)^T$.
72.31. $\dfrac{1}{7}(5,6)^T$. **72.32.** $-\dfrac{1}{75}(1,2)^T$. **72.33.** $\dfrac{1}{2}(1,0,1)^T$.
72.34. $\dfrac{1}{2}(1,0,1)^T$. **72.35.** $(1,1,0)^T$. **72.36.** $\left(\dfrac{13}{30},\dfrac{3}{5}\right)^T$.

72.37. $\left(\frac{2}{5}, \frac{22}{35}\right)^T$. **72.38.** $\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right)^T$.

72.39. а) $\frac{1}{5}(1-t^2)$; б) $\frac{1}{24}(-8t+t^3)$.

72.40. Указание. Показать, что ортогональная проекция матрицы I на образ оператора $\mathcal{C}X = [A, X]$ есть нулевая матрица.

72.41. Функция $f(x)$ и наименьшее среднее квадратичное отклонение соответственно равны:

а) $f(x) = (-x+3)/4$, 1; б) $f(x) = (-x^2+3x+3)/4$, $\sqrt{5}/4$;

в) $f(x) = x^2 - 2x + (4/3)$, $\sqrt{2}/3$;

г) $f(x) = -(1/2)x + (4/3)y - (1/6)$, $1/\sqrt{24}$;

д) $f(x) = (x+y+3)/7$, $6\sqrt{10}/35$.

Предметный указатель

k-й момент собственных значений 168
λ-уравнение 286
n-мерный параллелепипед в евклидовом (унитарном) пространстве 92

А
Алгебра операторов над полем 148
Альтернатива Фредгольма 86, 240, 366
Аннулирующий многочлен 156

Б
База системы векторов 8
Базис Шура 228
Билинейная форма 299
– – от переменных 299
Биортогональная пара базисов 68, 227
Биортогональные системы векторов 68

В
Вырожденная билинейная форма 300
– квадратичная форма 301
Вырожденный оператор 148
Высота корневого вектора 202

Г
Гиперплоскость 42
Главная подматрица 279
Главный минор 279

Д
Двойственная норма 347
Дефект оператора 134
Диагонализуемая матрица 178
Диагонализуемый оператор 178
Длина вектора 56
Дополнительное подпространство 31

Е
Евклидова норма 338
– – оператора 350
Евклидово пространство 54
Естественный базис пространства P^n 9

Ж
Жорданова клетка 164
– форма матрицы 204
– – оператора 204

З
Задача о наименьших квадратах 369
– – перпендикуляре 79
Закон инерции 310
– композиции внутренний 8
– – внешний 8
Замкнутый шар 339
Знакоопределенные квадратичные формы 310
Знакопеременные квадратичные формы 310

И
Изометрия 57, 253
Изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств 57
– линейных пространств 12
Изоморфизма линейных пространств критерий 12
Изоморфные евклидовы (унитарные) пространства 57
– линейные пространства 11
Изотропный вектор 318
Инвариантное подпространство 187
– – минимальной размерности 188
Индекс инерции квадратичной формы отрицательный 310
– – – – положительный 310
– нильпотентности оператора 188
Индуцированный оператор 187

К
Каноническая форма матрицы ортогонального оператора 254
Канонические коэффициенты квадратичной формы 301
Канонический базис квадратичной формы 301
– вид билинейной формы 301
– – квадратичной формы 301
– (жорданов) базис 204
Квадратичная форма 300
– – от переменных 300
Квадратный корень из оператора 276
Коллинеарные векторы 15
Компактное множество 339
Конгруэнтные матрицы 300
Корневое подпространство 202
Корневой вектор 202
Кососимметрический оператор 267
Косоэрмитов оператор 267
Коэффициенты линейной формы 112

Кратность собственного значения геометрическая 159
– – – алгебраическая 159
Критерии обратимости 148
– прямой суммы 29
– унитарности 253
Критерий изоморфизма евклидовых (унитарных) пространств 57
– нормальности 244
– подобия 204
– Сильвестра положительной определенности квадратичной формы 311
– – – – матрицы 280
– эквивалентности матриц 125
– Якоби положительной определенности матрицы 282

Л
Лемма Шура 152
Линейная зависимость 8, т.1 §15
– независимость 8, т.1 §15
– оболочка системы векторов 25
– форма (функционал) 110
Линейного многообразия вектор сдвига 42, т.1 §18
– – направляющее подпространство 42, т.1 §18
– – размерность 42
Линейного пространства аксиомы 8
– – размерность 8, т.1 §17
– – базис 8, т.1 §17
Линейное аффинное многообразие 42, т.1 §18
– нормированное пространство 338
– операторное уравнение 366
– отображение 110
– подпространство 25
– преобразование 110
– пространство вещественное 8
– – комплексное 8
– – линейных операторов 143
– – над полем P 8
– – рациональное 8
Линейный оператор 110

М
Матрица билинейной формы 299
– Грама 56
– квадратичной формы 300
– оператора в базисе 112
– – в паре базисов 111
– отражения 266
– перехода т.1, §17
– преобразования подобия 178
– простой структуры 178
– сопряженного оператора 227
– Фробениуса 177
– Якоби 173
Метод квадратного корня (метод Холецкого) 283
– Лагранжа (выделения полных квадратов) 302, 304
– элементарных преобразований 302, 304
Метрика 90
Метрики аксиомы 90
Метрическое пространство 90
Многочлен от оператора 148
Многочлены Лежандра 74

Н
Наклонная 79
Невырожденная билинейная форма 300
– квадратичная форма 301
Невырожденный оператор 148
Невязка вектора 366
Неотрицательно определенная квадратичная форма 310
– – матрица 276
– определенный оператор 276
Неположительно определенная квадратичная форма 310
– – матрица 276
– определенный оператор 276
Непрерывность оператора 348
Неравенство Адамара 89, 284
– Бесселя 88
– Гёльдера 340
– Кларксона 344
– Коши–Буняковского–Шварца 56
– Минковского для определителей 287
– – для сумм 340
– Сильвестра 153
– треугольника 56
– Фробениуса 153
– Шура 364
– Юнга 341
Нильпотентный оператор 188
Норма 338
– вектора 338
Нормальная матрица 244
Нормальное псевдорешение 366
– решение линейного операторного уравнения 366
– уравнение 366
Нормальный вид квадратичной формы 312

– оператор 243
– вектор линейного многообразия 103
Нормированный вектор 56
Нормы Гёльдера 340

О
Обобщенная проблема собственных значений 286
Образ оператора 133
Обратный оператор 148
Общий вид билинейной формы 299
– – квадратичной формы 300
– – линейной формы 112
Объем n-мерного параллелепипеда 92
Ограниченное множество 339
Ограниченный оператор 348
Одноклеточный оператор 215
Однородный многочлен 33
Оператор дифференцирования 110
– изометричный 253
– нулевой 110
– ортогонального отражения 248
– – проектирования 248
– отражения 110
– проектирования 110
– простого вращения 254
– – отражения 254
– простой структуры 178
– скалярный 116
– тождественный (единичный) 111
Определитель оператора 126
Ортогональная матрица 68
– проекция вектора 79
– система векторов 65
– составляющая вектора 79
– сумма подпространств 80
Ортогонально подобные матрицы 244
– эквивалентные квадратичные формы 336
Ортогональное дополнение 78
Ортогональные векторы 65
– подпространства 80
Ортогональный к подпространству вектор 78
– оператор 253
Ортонормированная система векторов 65
Ортонормированный базис 66
Отрицательно определенная квадратичная форма 310
– – матрица 276
– определенный оператор 276

П
Параллелограмм в евклидовом (унитарном) пространстве 91
Параллельные линейные многообразия 45
Пересечение подпространств 27
Перпендикуляр 79
Подобные матрицы 125
Подчиненная норма оператора 349
Полный прообраз вектора 139
– – подпространства 139
Положительно определенная квадратичная форма 310
– – матрица 276
— определенный оператор 276
Полуопределенные квадратичные формы 310
Полуторалинейная форма 311
Полярная билинейная форма 300
– полуторалинейная форма 312
Полярное разложение 289
Предел последовательности векторов по норме 339
Приведение квадратичной формы к главным осям 320
– пары квадратичных форм к каноническим видам 320, 326, 335
Проектор 110
Произведение многообразия на число 49
– линейных операторов 147
– оператора на число 142
Пространство векторное 8
Процесс ортогонализации Грама–Шмидта 67
Прямая 42
Прямая сумма операторов 188
– – подпространств 29
Псевдорешение 366

Р
Равенство параллелограмма 344
– Парсеваля 88
Разложение вектора по подпространствам 27
Размерность алгебры операторов 148
Ранг билинейной формы 300
– квадратичной формы 300
– оператора 134
– системы векторов 9
Расстояние между векторами по норме 346
– – вектором и подпространством в метрическом пространстве 90

– – линейными многообразиями 105
– – множествами метрического пространства 90
– – элементами метрического пространства 90
– от вектора до линейного многообразия 104
Решение линейного операторного уравнения 366

С
Самосопряженная матрица 267
Самосопряженный оператор 267
Свойство мультипликативности нормы 349
Серия корневых векторов 213
Сигнатура квадратичной формы 310
Сигнатурное правило Якоби 310, 315
Симметричная билинейная форма 299
Симметрическая матрица 267
Симметрический оператор 267
Сингулярное разложение 294
– число 292
Сингулярные базисы 293
Скалярного произведения аксиомы 54
Скалярное произведение 54
– – стандартное 54–56
След оператора 159
Собственное значение матрицы 158
– – оператора 158
– подпространство 159
Собственный вектор матрицы 158
– – оператора 158
Согласованная норма 348
Сопровождающая матрица многочлена 177
Сопряженное уравнение 366
Сопряженный оператор 227
Спектр оператора 158
Спектральная норма оператора 349
– характеристика самосопряженного оператора 267
– – унитарного оператора 253
Спектральный радиус оператора 252
Среднее квадратичное отклонение 369
Строго нормированное пространство 345
Сужение оператора 187
Сумма линейных многообразий 49
– операторов 142
– подпространств 27
Сфера 339
Сходящаяся по норме последовательность векторов 339

Т
Теорема Бендиксона 291
– Вейля 275
– Гамильтона–Кэли 204
– Куранта–Фишера 275, 295, 351
– о канонической паре базисов 135
– – кратчайшем расстоянии в евклидовом (унитарном) пространстве 90
– – монотонности собственных значений 288
– – – размерности 27
– – неполном базисе 9
– – разделении собственных значений 275
– – ранге и дефекте 134
– – расщеплении линейного оператора 203
– Фредгольма 86, 240, 366
– Шура 228
Треугольник в евклидовом (унитарном) пространстве 91
Треугольное преобразование переменных 307
– разложение матрицы 316

У
Угловой минор 280
Угол между векторами 92
– – вектором и подпространством 92
– – линейными многообразиями 105
– – подпространствами 92
Унитарная матрица 68
Унитарно подобные матрицы 244
Унитарное пространство 54
Унитарный оператор 253

Ф
Фактор-пространство 49
Формулы Якоби 301
Функционал невязки 366

Х
Характеристический многочлен матрицы 159
– – оператора 159
Характеристическое уравнение 159

Ц
Циклическое подпространство 213

Э
Эквивалентные квадратичные формы 301
– нормы 340

– системы векторов 9
Эрмитов оператор 267
Эрмитова квадратичная форма 312
– матрица 267
– полуторалинейная форма 311
Эрмитово разложение 288

Я
Ядро и образ сопряженного оператора 227
– оператора 134

Указатель обозначений

$(A \mid B)$ – блочная матрица, полученная из матрицы A приписыванием к ней справа матрицы B, 39

$A_{fe}, A_e, (A)_{fe}, (A)_e$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e, f (в базисе e), 111–112

$\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к оператору $\mathcal{A}$, 148

$\mathcal{A}^{1/2}$ – квадратный корень из оператора $\mathcal{A}$, 276

$\mathcal{A}^*$ – оператор, сопряженный к оператору $\mathcal{A}$, 227

A^H – матрица, сопряженная к матрице A, т.1 §41

$\mathcal{A}|L$ – оператора $\mathcal{A}$, индуцированный на L (сужение оператора $\mathcal{A}$ на L), 187

$\mathcal{A}(x, y)$ – билинейная форма, 299

$\mathcal{A}(x, x)$ – квадратичная форма, 300

$\|\mathcal{A}\|$ – норма оператора $\mathcal{A}$, 348

$\|\mathcal{A}\|_2$ – спектральная норма оператора $\mathcal{A}$, 348

$\|\mathcal{A}\|_E$ – евклидова норма оператора $\mathcal{A}$, 350

$\|\mathcal{A}\|_p$ – норма оператора $\mathcal{A}$, подчиненная векторным p-нормам, 349

$B(x_0, r)$ – шар с центром x_0 радиуса r, 339

$\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ – вещественное пространство комплексных векторов, 9

$\operatorname{def} \mathcal{A}$ – дефект оператора $\mathcal{A}$, 134

$\det \mathcal{A}$ – определитель оператора $\mathcal{A}$, 126

$G(a_1, \ldots, a_k)$ – матрица Грама системы векторов $a_1, \ldots, a_k$, 56

$\mathcal{I}$ – единичный (тождественный) оператор, 111

$\operatorname{im} \mathcal{A}$ – образ оператора $\mathcal{A}$, 133

$J_k(\lambda)$ – жорданова клетка k-го порядка, диагональные элементы которой равны λ, 164

$\ker \mathcal{A}$ – ядро оператора $\mathcal{A}$, 134

$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ – линейная оболочка, натянутая на векторы $a_1, \ldots, a_k$, 25

$\mathcal{L}(V, W)$ – линейное пространство линейных операторов, действующих из V в W, 110, 142

$L_1 + \ldots + L_k$ – сумма линейных подпространств $L_1, \ldots, L_k$, 27

$L_1 \cap \ldots \cap L_k$ – пересечение линейных подпространств $L_1, \ldots, L_k$, 27

$L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$ – прямая сумма линейных подпространств $L_1, \ldots, L_k$, 29

L^δ – дополнительное подпространство к подпространству L, 31

$L^\perp$ – ортогональное дополнение к подпространству, 78

$\mu(\mathcal{A})$ – подчиненная норма оператора $\mathcal{A}$, 349

$\mathcal{O}$ – нулевой оператор, 110

$\mathcal{P}$ – проектор (оператор проектирования), 110

P^n – арифметическое пространство над полем P, 9

$\mathcal{R}$ – оператор отражения, 110

$\operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_k)$ – ранг системы векторов $a_1, \ldots, a_k$, 9

$\operatorname{rg} \mathcal{A}$ – ранг оператора $\mathcal{A}$, 134

$\rho(\mathcal{A})$ – спектральный радиус оператора $\mathcal{A}$, 252

$\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, y)$ – ранг билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$, 300

$\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, x)$ – ранг квадратичной формы $\mathcal{A}(x, x)$, 300

$\rho(x, y)$ – расстояние между векторами x и y, 90

$S(x_0, r)$ – сфера с центром x_0 радиуса r, 339

$\operatorname{tr} \mathcal{A}$ – след оператора $\mathcal{A}$, 159

(x, y) – скалярное произведение векторов x и y, 54

$|x|$ – длина вектора x, 56

$\|x\|$ – норма вектора x, 338
$\|x\|_E$ – евклидова норма вектора x, 338
$\|x\|_p$ – p-ая норма Гёльдера вектора x, 338–340
$x \perp L$ – вектор x перпендикулярен подпространству L, 78

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

АДРЕС:

119992, Москва, ГСП-2, Ленинские горы, 1 МГУ, 2-й учебный корпус

ТЕЛЕФОНЫ:

Приемная комиссия:	939-55-90
Подготовительные курсы:	932-98-08
Вечерняя математическая школа:	932-98-08
Подготовительное отделение:	939-27-17
Вечернее специальное отделение для лиц с высшим образованием:	939-17-73
Международный отдел факультета:	939-54-55 E-mail: FAO@cs.msu.su
Информацию о факультете ВМиК, в том числе для абитуриентов, можно посмотреть на странице факультета	http://www.cs.msu.su
E-mail факультета ВМиК МГУ:	cmc@cs.msu.ru

Информацию о других факультетах МГУ, программах вступительных экзаменов, конкурсе и другую информацию можно посмотреть на странице МГУ

http://www.msu.ru

Учебный центр
факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова

Уважаемые студенты и молодые специалисты!

Для вас на нашем сайте http://www.vmk-edu.ru/ подробно описаны программы обучения, которые, дополняя основное образование, предоставляют вам возможность профессионально расти и развиваться в различных областях информационных технологий. Лучшие преподаватели факультета ВМК помогут Вам в этом.

Направление **«Программирование на C, C++, Java»** потребуется Вам не только чтобы освоить конкретные языки программирования, но и для того, чтобы лучше узнать основы процесса написания и отладки программ. В том числе, взять на вооружение основные приемы объектно-ориентированного программирования.

Знание программы **«1С: Предприятие»** позволяет в дальнейшем, при выстраивании своей рабочей модели, использовать этот инструмент для составления отчетных форм, различных по целям и сложности.

Курс направления **«Менеджмент для IT»** дает необходимые для руководящей работы знания о взаимодействии ИТ-подразделений с остальными департаментами компании и о грамотном выстраивании рабочих процессов на основе лучших практик, принятых в мире.

Для того чтобы научиться профессионально создавать сайты, можно посетить курсы направления **«Web-технологии»** и получить ответы на основные вопросы начинающего создателя сайтов: С чего начать разработку сайта? Как использовать html? Какие инструменты удобнее использовать в той или иной ситуации? И т.п.

В программе **«Компьютерная графика и верстка»** можно освоить любой из самых востребованных в настоящий момент инструментов для решения задач по данному направлению.

Курсы базовой подготовки по **Windows** и **Word** дадут Вам уверенность при работе с текстами, а продолжив обучение, Вы узнаете все возможности и нюансы работы с таблицами **Excel** и работы с **Интернетом**.

ТЕЛЕФОНЫ: 939-54-29, 939-36-04

АДРЕС: Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, комната 649.

Ким Г.Д., Крицков Л.В.

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ:

Теоремы и задачи.

Том II

Издательство ООО "Планета Знаний"
119454, Москва, пр-т Вернадского, д.78, стр.4, эт.1,
тел./факс (495)434-95-74
Подписано в печать 10.09.2008.
Формат 60x90/16. Усл.печ.л.29.
Тираж 2000 экз.
Зак. 3559.

Отпечатано в ООО ПФ «Полиграф-Книга»,
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: 8(817-2) 72-61-75; 8(817-2) 72-60-63.
E-mail: poligrafist35@metacom.ru